

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**В.В. ЗАГОРОДНІЙ**

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА**

**МЕХАНІКА**

Друге видання, виправлене і доповнене

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як підручник для студентів, які навчаються  
за спеціальністю 105  
«Прикладна фізика та наноматеріали»

КИЇВ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2020

**Рецензенти:**

Боровий Микола Олександрович, завідувач кафедри загальної фізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат наук.

Багмут Олександр Григорович, завідувач кафедри теоретичної та експериментальної фізики фізико-технічного факультету Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», доктор фіз.-мат. наук, професор.

Черемних Олег Костянтинович, заступник директора з наукової роботи Інституту космічних досліджень НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор.

Коваленко Валерій Фадейович, професор кафедри електрофізики факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, професор.

**Відповідальний редактор:**

Воронов Сергій Олександрович, доктор техн. наук, професор.

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 8 від 30 червня 2016 року)

Електронне мережне навчальне видання

Загородній Вячеслав Васильович, канд. техн. наук, доц.

Загальна фізика: Механіка [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / Загородній В.В. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Видання друге, виправлене і доповнене. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.77 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 364 с.

Викладаються базові фундаментальні принципи класичної механіки Ньютона та основні положення спеціальної теорії відносності (СТВ). Послідовно розглянута кінематика матеріальної точки і системи точок (твердого тіла), кінематика СТВ, класична динаміка Ньютона і динаміка СТВ, закони збереження імпульсу, моменту імпульсу, рух тіл зі змінною масою, потенціальні і консервативні сили, закони збереження енергії в системі взаємодіючих і невзаємодіючих матеріальних точок при переміщенні в консервативних полях, релятивістська енергія точки і системи точок, закони збереження у СТВ. Розгляд СТВ подається в чотиривимірному просторі Мінковського. Викладені особливості рухів у центральному полі, зокрема, в полі тяжіння. Розглянуті закономірності, виникаючи в неінерціальних системах відліку, що рухаються довільним чином. Наведені приклади розрахунків моментів інерції симетричних твердих тіл, обговорені закономірності руху під час ковзання, рухи гіроскопів та дзиг. Розглянуті коливання вільного осцилятора, згасаючі вільні коливання, вимушені коливання, додавання коливань різних типів та виникнення биття. Для студентів, які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського. Може бути корисним студентам інших фізичних спеціальностей.

Загородній В.В., 2020

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

## З М І С Т

|   |     |
|---|-----|
| <b>ПЕРЕДМОВА</b>                                    | 7   |
| <b>ВСТУП</b>  | 9   |
| <b>РОЗДІЛ I КІНЕМАТИКА</b>                          | 16  |
| 1.1 Предмет та завдання механіки                    | 16  |
| 1.2 Кінематика                                      | 20  |
| 1.3 Способи опису руху матеріальної точки           | 24  |
| 1.3.1 Переміщення, швидкість і прискорення          | 26  |
| 1.3.2 Нормальне і тангенціальне прискорення         | 32  |
| 1.3.3 Рух по колу                                   | 35  |
| 1.4 Одиниці фізичних величин                        | 39  |
| 1.5 Кінематика руху твердого тіла                   | 40  |
| 1.5.1 Види руху твердого тіла                       | 40  |
| 1.5.2 Обертальний рух твердого тіла                 | 41  |
| 1.5.3 Плоский рух твердого тіла                     | 44  |
| 1.6 Перетворення координат                          | 53  |
| 1.7 Інерціальні системи відліку. I закон Ньютона.   |     |
| Принцип відносності                                 | 56  |
| 1.8 Перетворення Галілея                            | 57  |
| 1.9 Принципи класичної механіки та її обмеження     | 61  |
| 1.10 Принцип відносності Ейнштейна. Постулати СТВ   | 63  |
| 1.11 Перетворення Лоренца                           | 65  |
| 1.12 Наслідки перетворень Лоренца                   | 68  |
| 1.13 Релятивістське перетворення швидкостей         | 73  |
| 1.14 Релятивістське перетворення прискорень         | 75  |
| 1.15 Класифікація інтервалів                        | 77  |
| 1.16 Чотиривимірний простір Мінковського            | 80  |
| 1.17 Чотиривимірні вектори                          | 83  |
| 1.18 Про комплексні величини у визначенні інтервалу | 87  |
| Задачі для самостійного розв'язування               | 88  |
| <b>РОЗДІЛ II ДИНАМІКА ТОЧКИ І СИСТЕМИ ТОЧОК</b>     | 91  |
| 2.1 Задача динаміки                                 | 91  |
| 2.2 Другий закон Ньютона                            | 92  |
| 2.3 Третій закон Ньютона                            | 96  |
| 2.4 Сили в механіці                                 | 97  |
| 2.5 Імпульс матеріальної точки. Імпульс сили        | 101 |
| 2.6 Імпульс системи матеріальних точок              | 103 |
| 2.7 Закон збереження імпульсу                       | 105 |
| 2.8 Центр мас. Теорема про рух центру мас           | 107 |
| 2.9 Момент імпульсу. Момент сили                    | 109 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.9.1 Рівняння моментів. Імпульс моменту сили   | 109 |
| 2.9.2 Момент імпульсу і момент сили відносно осі  | 112 |
| 2.9.3 Момент імпульсу системи точок   | 113 |
| 2.9.4 Закон збереження моменту імпульсу для системи точок                                   | 115 |
| 2.9.5 Перетворення моменту імпульсу і моменту сили  | 116 |
| 2.9.6 Момент імпульсу відносно рухомого початку координат                                   | 118 |
| 2.9.7 Система центру мас. Момент сил відносно рухомого початку                              | 121 |
| 2.10 Рух тіл змінної маси   | 124 |
| 2.11 Релятивістська динаміка  | 130 |
| 2.11.1 4-вимірні вектори  | 132 |
| 2.11.2 4-вектор швидкості   | 133 |
| 2.11.3 4-вектор енергії-імпульсу  | 136 |
| 2.11.4 Релятивістське рівняння руху   | 138 |
| 2.11.5 Наслідки з релятивістського рівняння руху  | 139 |
| Задачі для самостійного розв'язування   | 143 |
| <b>РОЗДІЛ III РОБОТА І ЕНЕРГІЯ</b>  | 144 |
| 3.1 Робота сили. Потужність   | 144 |
| 3.2 Кінетична енергія   | 146 |
| 3.3 Поле сил. Потенціальна енергія. Потенціальна сила                                       | 149 |
| 3.4 Поняття градієнта функції   | 151 |
| 3.5 Консервативні сили. Робота консервативних сил   | 154 |
| 3.6 Робота сторонніх сил. Закон збереження повної механічної енергії для матеріальної точки | 158 |
| 3.7 Закон збереження повної механічної енергії системи невзаємодіючих матеріальних точок    | 162 |
| 3.8 Потенціальна енергія взаємодії точок  | 163 |
| 3.9 Закон збереження енергії системи взаємодіючих точок                                     | 167 |
| 3.10 Теорема Кеніга   | 170 |
| 3.11 Зіткнення двох тіл   | 172 |
| 3.12 Одновимірний рух точки в полі консервативних сил                                       | 180 |
| 3.13 Релятивістська енергія   | 183 |
| 3.13.1 Часова компонента 4-імпульса   | 183 |
| 3.13.2 Робота сили і енергія точки  | 188 |
| 3.13.3 Релятивістські співвідношення для систем точок                                       | 192 |
| 3.14 Закони збереження і симетрія простору і часу   | 194 |
| Задачі для самостійного розв'язування   | 200 |
| <b>РОЗДІЛ IV РУХ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ ПОЛІ</b>  | 203 |
| 4.1 Поле центральних сил. Гравітаційне поле сил   | 203 |
| 4.2 Рівняння руху в полі центральної сили   | 205 |
| 4.3 Особливості руху в полі центральної сили  | 210 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.4 Ефективна потенціальна енергія. Межі руху                         | 212 |
| 4.5 Рух в гравітаційному полі. Траєкторія руху                        | 216 |
| 4.6 Рух по еліпсу. Закони Кеплера                                     | 220 |
| 4.7 Задача двох тіл   | 223 |
| 4.8 Поле поблизу поверхні Землі. Космічні швидкості                   | 229 |
| Задачі для самостійного розв'язування                                 | 231 |
| <b>РОЗДІЛ V РУХ В НЕІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ВІДЛІКУ</b>                 | 233 |
| 5.1 Сили інерції і закони Ньютона                                     | 233 |
| 5.2 Рівняння руху в НСВ, що рухаються поступально                     | 235 |
| 5.3 Формула Пуансо  | 237 |
| 5.4 Сили інерції під час довільного прискореного руху НСВ             | 239 |
| 5.5 Сили інерції в НСВ, що рухаються поступально                      | 246 |
| 5.6 Сили інерції в НСВ, що обертаються                                | 250 |
| 5.7 Рух тіл поблизу Землі з урахуванням її обертання                  | 252 |
| 5.8 Вага і зважування тіл   | 255 |
| 5.9 Прояви сили Коріоліса під час руху тіл                            | 257 |
| 5.10 Принцип еквівалентності  | 260 |
| 5.11 Енергетичні співвідношення в НСВ                                 | 263 |
| Задачі для самостійного розв'язування                                 | 264 |
| <b>РОЗДІЛ VI ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА</b>                               | 265 |
| 6.1 Рівняння руху твердого тіла                                       | 265 |
| 6.2 Типи руху твердого тіла   | 268 |
| 6.3 Момент імпульсу твердого тіла. Моменти інерції.<br>Тензор інерції | 271 |
| 6.4 Головні і центральні головні осі інерції                          | 277 |
| 6.5 Момент імпульсу і момент інерції відносно осі                     | 279 |
| 6.6 Обчислення моментів інерції                                       | 281 |
| 6.7 Теорема Гюйгенса – Штейнера                                       | 286 |
| 6.8 Основне рівняння динаміки обертального руху                       | 288 |
| 6.9 Робота, потужність і кінетична енергія обертального руху          | 290 |
| 6.10 Плоский рух твердого тіла  | 293 |
| 6.11 Кінетична енергія під час плоского руху                          | 301 |
| 6.12 Рух гіроскопів   | 302 |
| 6.12.1 Вільні осі обертання   | 302 |
| 6.12.2 Рух вільного гіроскопа   | 304 |
| 6.12.3 Прецесія гіроскопа під дією зовнішніх сил                      | 307 |
| Задачі для самостійного розв'язування                                 | 312 |
| <b>РОЗДІЛ VII КОЛИВАЛЬНІ РУХИ</b>                                     | 314 |
| 7.1 Гармонічний осцилятор   | 314 |
| 7.2 Умови гармонічності коливань                                      | 320 |
| 7.3 Енергія гармонічного осцилятора                                   | 328 |

|   |     |
|---|-----|
| 7.4 Згасаючі власні коливання                           | 330 |
| 7.5 Вимушені коливання                                  | 336 |
| 7.6 Амплітудно-частотна характеристика. Явище резонансу | 339 |
| 7.7 Фазова характеристика вимушених коливань            | 343 |
| 7.8 Встановлення коливань                               | 344 |
| 7.9 Додавання коливань однакової частоти                | 346 |
| 7.10 Додавання взаємно перпендикулярних коливань        | 349 |
| 7.11 Модульовані коливання. Биття                       | 354 |
| Задачі для самостійного розв'язування                   | 360 |
| <b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b>                                | 362 |

## ПЕРЕДМОВА

Однією з основних природничо-наукових дисциплін, в яких вивчаються закони неживої природи, є фізика. Під природничими науками сьогодні можна розуміти ті галузі знань, в яких може бути проведений експеримент для підтвердження припущень і моделей, висунених теорією і проведених дослідів. Еволюція розвитку природничих наук дозволила істотно розширити цим наукам методологію досліджень порівняно з філософією, частиною якої вони були, і перетворити їх із споглядальних в експериментальні.

Ідеї, що вивчаються нині в класичних курсах фізики, сформувалися, як наука і система світогляду приблизно 200 років тому. Фізика тісно переплітається з багатьма інженерними і технічними дисциплінами, більшість з яких давно відокремились в самостійні області досліджень. Фізичні методи і ідеї широко використовують в інших галузях знань. Створені пограничні науки на стику дисциплін: біофізика, хімічна фізика та ін. Відмінна риса фізики – вивчення основних закономірностей, процесів і явищ в природі. Основне завдання фізики – виявляти фундаментальні закономірності нашого світу, еволюцію його розвитку, відкривати нові можливості інженерії, прокладати дорогу до проривних рішень в області нових технологій. Важко переоцінити величезну роль фізики, її різних галузей, в розвитку наукової думки і людської цивілізації. Досить згадати як приклад прогрес ядерної енергетики на основі досягнень ядерної фізики, що дозволило здійснити значний прорив в розвитку продуктивних сил людства.

Курс загальної фізики традиційно складається із декілька розділів: механіка, молекулярна фізики і основи термодинаміки, електрика і магнетизм, оптика, атомна фізика, ядерна фізика. Такий підхід дозволяє

виділити з усього різноманіття ті питання, які можна описати з єдиної точки зору, на основі загальних для конкретного розділу підходів і законів.

Пропонований підручник написаний на основі лекцій з механіки, які упродовж ряду років читають студентам-фізикам першого курсу фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського. Незважаючи на наявність широкого вибору підручників і навчальних посібників, в яких виклад цього розділу фізики дається фундаментально і усеосяжно (класичні курси Д.В. Сивухіна, І.В. Савельєва, І.Є. Іродова, А.Н. Матвєєва та ін.), в основі пропонованого матеріалу – компактний і строгий виклад основних класичних, традиційно сталих питань, що зазвичай включаються в курси механіки загальної фізики.

Підручник складений на основі програми курсу «Загальна фізика. Механіка» і включає традиційні розділи: кінематика; динаміка; робота і енергія; рух в центральному полі; рух в неінерціальних системах відліку; динаміка твердого тіла; коливальні рухи. Особливістю побудови курсу є те, що перші три розділи, разом з викладом класичної механіки Ньютона, містять відповідні розділи спеціальної теорії відносності (СТВ). Це дозволить студентам безпосередньо зрозуміти відмінності класичного ньютонівського і релятивістського підходу в описі і трактуванні основних законів механіки. Кожен розділ закінчується задачами, частина з яких є оригінальними.

Призначений для студентів фізико-технічних спеціальностей, що навчаються за напрямом підготовки 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». Може бути корисним для інших фізичних спеціальностей і напрямків підготовки.

Автор висловлює щирі подяку всім, хто зацікавлено допомагав під час обговорення і оформлення рукопису та в інших організаційних питаннях. Без їх участі підготовка і видання рукопису була неможливою.



## ВСТУП

### 1°. Методи і задачі фізики

Слово «фізика» походить від грецького φυσική (фюзикс), що означає «природа». Отже, фізика – наука про природу. Фізика – розділ природознавства, яка вивчає найбільш загальні властивості і форми руху матерії [14, 22]. Під матерією розуміють як речовину, так і різні поля. Фізика виникла з прагнення описати світ, що оточував людину, пояснити і, отже, визначити напрям його зміни, його еволюцію. Світ цей надзвичайно складний, і людина є частиною цього світу. У повсякденному житті, в практичній діяльності людина стикається з різними фізичними об'єктами, явищами природи, проявом фізичних закономірностей. Як частина оточуючого світу, людина завжди прагне зрозуміти його, засвоїти, як світ влаштований. Отже, людина намагається пізнати цей світ. Чи можливе пізнання нашого світу? З власного досвіду відомо, що світ пізнаваний і багато що вже відомо про основні фізичні явища і закономірності. Як же за допомогою фізики, тобто під час вивчання природи, здійснюється процес пізнання навколишньої дійсності?

1). Фізика – наука, в якій всі фізичні теорії і моделі ґрунтуються на дослідах і експериментах. Дослід лежить в основі вивчених фізичних законів, дослід є критерієм правильності. Отже, в основі напрямків і способів пізнання природи лежить дослід, експеримент. Дослід – це відтворення природного явища, спостережуваного людиною з метою пізнання цього явища [6]. На основі спостереження фізичних явищ, виходячи з дослідів, накопиченого людством на різних етапах його розвитку і еволюції, було встановлено, що в природі існують стійкі закономірності, що повторюються. Ці закономірності можуть бути отримані і з експерименту. Об'єкти природи мають різноманіття властивостей, і внаслідок такого величезного різнома-

ніття, в експерименті ми спостерігаємо лише конкретний прояв певних властивостей об'єкту, фрагменти деякої реальної фізичної системи. Фрагменти відображають ті умови, в яких під час проведення експериментів проявляються фізичні явища і властивості об'єктів, що вивчаються, час і тривалість їх проведення.

2). На підставі цих спостережень далі будується деяка гіпотеза, яку можна назвати фізичною теорією, деяка логічна конструкція, яка в нашій свідомості відображає процес пізнання об'єктивних законів природи. Будується система знань про властивості явища і об'єктів, що вивчаються, закономірності перебігу фізичних явищ. Таким чином, побудована фізична теорія, модель, є продуктом розумової діяльності, відображенням об'єктивно існуючих окрім нашої свідомості законів природи. У такий спосіб будується фізична теорія. Але початковим поштовхом, етапом будь-якого наукового пізнання є експериментальні дослідження фрагмента природної діяльності. І лише потім, з індуктивного узагальнення результатів експерименту, з осмислення, висловлюється наукова гіпотеза про закономірності явища, що вивчається. Чому ж це тільки гіпотеза (припущення)? Хоч би тому, що число експериментів обмежене. Якщо  $N$  експериментів підтверджує результат, то можна припустити що в  $N + 1$  експерименті можна теж отримати близький до попередніх експериментів результат. Саме тому початковий етап всякої наукової теорії – емпірична гіпотеза, що виражає емпіричний закон. Емпірична гіпотеза, таким чином – результат узагальнювання експериментальних даних; вона описує, як відбувається явище, але не відповідає на питання, чому так, а не інакше [1].

3). Наступний етап пізнання – теоретичний етап. Тут висловлюються теоретичні гіпотези: про властивості даних матеріальних об'єктів, які визначають перебіг фізичного явища, що вивчається; про причини перебігу в певних умовах; про можливі напрями розвитку цього явища, якщо змінити

властивості і параметри таких об'єктів. Водночас виникаюча фізична теорія оперує не реальними об'єктами, а їх копіями, що ідеалізуються – моделями. Модель у свідомості людини складається з образів, об'єктів, явищ, ситуацій їх прояву, зв'язків між ними, правил оперування з ними. У цих моделях і враховують найбільш суттєві властивості реальних об'єктів: моделей реальних тіл; моделей зовнішніх умов, в яких перебігають явища; основні закони, що визначають суть фізичних явищ за певних умов. Наприклад, використовують поняття матеріальної точки, формулюють основні фізичні закони для такої моделі. Таким чином, створення моделі – це врахування найбільш суттєвих чинників і відкидання несуттєвого, ідеалізація реальної ситуації з використанням абстрактних понять: матеріальна точка, прямолінійний рівномірний рух, абсолютно тверде тіло, абсолютно пружний удар, гармонічні коливання і таке інше. З отриманих основних законів дедуктивно, користуючись математикою, виводять теоретичні наслідки. Необхідно відмітити, що всі моделі мають наближений характер і справедливі для тієї групи явищ, для якої створювались [14].

Звідси виходить задача фізики – створити в нашій свідомості таку картину фізичного світу, яка якнайповніше відображає властивості світу, і забезпечує такі співвідношення між елементами моделі, які існують між елементами зовнішнього світу [2].

Отже, основними методами фізики є: дослід, спостереження; побудова фізичної моделі; постійне розширення і поглиблення цієї моделі в результаті експериментів і спостережень, адже основою фізики є експеримент. Деяке наочне уявлення про методи фізики дає наведена нижче діаграма, в якій показаний процес взаємодії один з одним різних етапів пізнання, характерних для побудови фізичної теорії.



Отже, на основі спостережень і експериментів створюється модель; у її рамках здійснюється завбачення про явища, що перевіряються в експериментах для подальшого уточнення моделі.

## 2°. Відомі моделі світу

Згідно з фізичними уявленнями про світ, маємо таку ієрархію об'єктів у міру зменшення їх розмірів: Всесвіт, галактики, зірки і зоряні системи, планети, макротіла, мікроструктури, наноструктури, молекули і атоми, ядра, елементарні частинки [6].

1). Мікросвіт. На сьогодні відомо, що всі тіла, що оточують нас, складаються з атомів. Атоми – цегла всесвіту – знаходяться у безперервному русі і взаємодії. На великих відстанях атоми притягуються, на малих – відштовхуються. Їх розмір – порядку  $10^{-8}$  см ( $1\text{Å}$ ,  $10^{-6}$  м). Атоми складаються з позитивно зарядженого ядра і негативних електронів, що рухаються навколо нього. Розміри електрона  $< 10^{-16}$  см ( $10^{-18}$  м), розміри ядра порядку  $10^{-4} - 10^{-5}$  Å ( $10^{-12} - 10^{-13}$  см). Ядра складаються з елементарних частинок – протонів, нейтронів, які у свою чергу складаються з кварків.

2). Макросвіт. З іншого боку, де знаходяться усі тіла і предмети, у тому числі, і людина, що має порядку  $10^{16}$  клітин, цих елементарних фізіологічних комірок, кожна їх яких містить  $10^{12} - 10^{13}$  атомів? Усе це знаходиться в «великому ящику», у Всесвіті, розміри якого оцінюють порядку  $10^{28}$  см ( $10^{26}$  м).

Тому моделі умовно можна розділити на класичні (опис властивостей і закономірностей руху і взаємодії макротіл) і квантові (опис всього світу, і мікро і макро, так звана глобальна модель) [15]. Звідси виходить глобальна задача фізики – створення глобальної моделі. Оскільки моделі – це не сама дійсність, а тільки деяке до неї наближення, то може трапитися, що на якомусь етапі модель може не відображати властивості об’єктів, для яких була створена. Отже, у кожній моделі є свої межі придатності. За межами її придатності створюється нова модель, загальніша, при цьому попередня не відкидається, а включається в нову як окремий випадок [14]. Різноманіття явищ – світ явищ – відрізняється таким чином масштабами і способами опису. Способи опису різних моделей світу показані на діаграмі.

|  |   |   |
|--|---|---|
| <b>Мегасвіт</b><br>Галактики, Всесвіт<br>$10^{10}$ Галактик<br>$10^{11}$ зірок в Галактиці<br>$10^{56}$ атомів в зірці | <b>Макросвіт</b><br>Те, що нас оточує     | <b>Мікросвіт</b><br>Квантово-механічні частинки |
| Загальна теорія відносності, теорія гравітації.  | Механіка Ньютона.<br>Постулати Ейнштейна. | Квантова механіка.<br>Постулати Ейнштейна.      |

Необхідно відзначити, що всі моделі, що створюються з використанням різних абстракцій, мають наближений характер і справедливі лише для певної групи явищ, для якої вони створювалися. Наприклад, механіка Ньютона або класична механіка – це класична нерелятивістська механіка: вона вивчає досить повільні рухи тіл з достатньо великими масами. До явищ мікросвіту класичні представлення непридатні – там необхідно вико-

ристати квантово-механічні підходи. Для об'єктів, що рухаються зі швидкостями, порівнянними із швидкістю світла, використовують інший, релятивістський підхід на основі теорії відносності. При цьому ньютонівська механіка є граничним випадком і релятивістської і квантової механіки [16].

### 3°. Еволюція розвитку

Для атомів, що становлять наш світ, невід'ємною частиною є взаємодії. Що ж рухає світом і чому можуть бути виявлені і вивчені ті чи інші закони природи? Як в твердому тілі атоми з'єднуються між собою? Як Земля рухається по своїй орбіті, не злітаючи з неї? Відповіді на ці і деякі інші подібні питання вже відомі.

Нині в природі виявлені чотири види фундаментальних взаємодії [6,14]:

- 1) електромагнітна
- 2) гравітаційна
- 3) сильна взаємодія
- 4) слабка взаємодія

**Сильна взаємодія** проявляється в ядрах атомів і у світі елементарних частинок. Цей тип взаємодії відповідає за стійкість ядер атомів, радіус його дії не перевищує  $10^{-13}$  см. Сильна взаємодія, таким чином, є короткодіючою, оскільки радіус її дії порядку розміру ядра атомів. Ця взаємодія між частинками ядра і вона має характер притягання.

**Слабка взаємодія** проявляється при розпаді елементарних частинок. Цей тип взаємодії також є короткодіючим, його радіус дії не перевищує  $10^{-15}$  см, носіями цих взаємодій є бозони. Обидві взаємодії з обмеженим радіусом дії – сильне і слабке – іноді розглядають в квантовій фізиці як один тип взаємодії. Фундаментальні взаємодії переносяться квантами.

**Гравітаційна взаємодія**, основним проявом якої є закон всесвітнього тяжіння – це завжди притягання. Це та сила, яка примушує спалахувати

зірки, і надає ядрам атомів необхідну для їх зближення кінетичну енергію, щоб здолати сили електричного відштовхування. Носієм гравітаційних взаємодій є гравітони, передбачені загальною теорією відносності (ЗТВ), але доки не виявлені експериментально.

**Електромагнітні сили** породжують взаємодію між зарядженими частинками, струмами і полями. Здійснюються фотонами з нульовою масою. Електромагнітні і гравітаційні сили є силами далеко діючими: зі збільшенням відстані між взаємодіючими об'єктами ці сили спадають обернено пропорційно до квадрата цієї відстані. Нині об'єднують електромагнітні і слабкі взаємодії в одну [19]. Якщо вважати, що ядерні сили (сильна взаємодія) частинок в ядрі дорівнює одиниці, то електромагнітна взаємодія дасть  $10^{-2}$ , слабке –  $10^{-5}$ , гравітаційне –  $10^{-40}$ . Взаємодія поширюється за допомогою поля. «Порожні» простори, в яких відсутні частинки, наповнено полями, і там можуть існувати різні види полів.

Які взаємодії визначають усе різноманіття явищ на Землі? Основною рушійною силою майже всіх процесів, що відбуваються на Землі, є електромагнітні сили і явища, які ними викликаються. Гравітаційні хвилі експериментально ще не виявлені, але їх існування передбачає ЗТВ. Їх виявлення, можливо, скоро відбудеться.

Нині існує тенденція об'єднання усіх фундаментальних взаємодій в одну – так звана модель великого об'єднання, в якій розглядають як єдине сильну, слабку і електромагнітну взаємодії [14,15].

# РОЗДІЛ I

## КІНЕМАТИКА

### 1.1 Предмет та завдання механіки

Механіка походить від грецького слова μηχανή (механе) – машина, конструкція – наука, що вивчає переміщення тіл або їх частин один відносно одного. Завдання механіки – експериментальне дослідження різних рухів, узагальнення отриманих даних у вигляді законів, на підставі яких можна передбачити рух у кожному конкретному випадку [1,2,6].

Рух усіх матеріальних тіл відбувається в просторі і в часі. Крім того, всі тіла мають власні розміри і займають певне місце у просторі. З часом і розміри, і взаємне розташування тіл можуть змінюватись. Для експериментального вивчення рухів треба вміти визначати розміри тіл та просторові координати їх положення і тривалість руху. Щоб узагальнити отримані дані і передбачати рух тіл і частинок у вигляді закономірностей, необхідні уявлення про властивості простору і часу і про самі тіла. А для цього необхідно вміти будувати певні фізичні моделі явищ, що вивчаються.

#### Простір і геометрія

Всі матеріальні тіла мають протяжність, займають певне місце в просторі, розташовуються певним чином один відносно одного. Ці найбільш загальні властивості матеріальних тіл відобразились у вигляді поняття простору, а математичне формулювання цих властивостей було виражене у вигляді системи геометричних понять і зв'язків між ними. Формування геометрії як науки було завершено 2,5 тисяч років тому Евклідом. Пізніше деякі вчені і філософи надали поняттю простору самостійне значення. Геометрія, що базується на ряді аксіом, сформульованих Евклідом, називається геометрією Евкліда. В рамках цієї геометрії сума кутів трикутників



дорівнює  $180^\circ$ , відношення довжини кола до його діаметру дорівнює числу  $\pi$ , виконується теорема Піфагора і так далі. Простір, в якому все це виконується, називається простором Евкліда. Простір Евкліда безмежний, однорідний і ізотропний. Під однорідністю простору розуміють еквівалентність, подібність усіх його точок, їх однаковість, рівноправність. Під ізотропністю простору розуміють еквівалентність усіх напрямків в просторі. Уявлення про однорідність простору виникає з того факту, що результат експерименту за всіх інших рівних умов не залежить від місця розташування лабораторної установки. Ізотропність простору проявляється в тому, що результати експерименту за всіх інших рівних умов не залежать від повороту в просторі експериментальної установки або самого простору відносно установки. Саме такий простір використав Ньютон як модель абсолютного простору в його механістичній картині світу [22]. Отже, ньютонівський простір – це модель реального простору, яка прийнята в класичній механіці [1,2,13,14,15].

Ньютонівський простір 3-вимірний. Кількісне положення матеріальної точки в ньютонівському просторі задається процедурою арифметизації простору за допомогою системи координат. Тривимірність простору означає, що положення точки визначається трійкою незалежних чисел – трьома координатами:  $x, y, z$ . Арифметизація простору – це спосіб завдання відстані між двома точками в просторі Евкліда – завдання так званої метрики простору, яка визначається теоремою Піфагора:

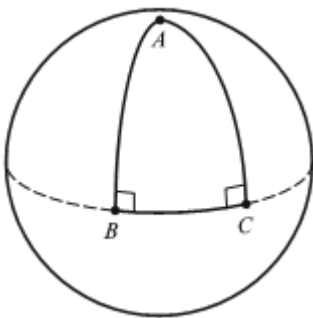
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

де  $\Delta x = x_2 - x_1$ ;  $\Delta y = y_2 - y_1$ ;  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Простір, в якому метрика задана таким чином, є плоским, тобто воно не має кривизни.

Між тим, у рамках загальної теорії відносності (ЗТВ), розробленої Ейнштейном, допускається викривлення простору [15]. Геометрія його перес-

тає бути Евклідовою. Розробкою геометрії викривлених просторів займалися Н. Лобачевський, К. Гаус, Б. Риман. Прикладом такого простору може бути викривлений простір поверхні кулі (рис. 1.1). Аналогом прямих ліній – ліній найкоротшої відстані АВ, АС, ВС – можуть служити дуги великих кругів АВ, АС, ВС. Ясно, що для трикутника АВС не виконується теорема Піфагора, а сума внутрішніх кутів більше  $180^\circ$ . Відхилення від евклідовості в цьому прикладі пов'язані з тим, що поверхня кулі має деяку кривизну.

Порушення евклідовості світового простору спостерігається на відстанях, порівнянних з розміром видимої частини Всесвіту ( $\sim 10^{26}$  м). Це викривлення реального простору обумовлене взаємним гравітаційним тяжінням тіл Всесвіту, що знаходяться в об'ємі сфери радіусу  $R \approx 10^{26}$  м, спостерігаються також і локальні порушення евклідовості поблизу великих гравітаційних мас наприклад, поблизу Сонця. Сучасні уявлення про евклідовість простору базуються на спостереженнях віддалених об'єктів, вимірі флуктуацій реліктового випромінювання і висновках теорії великого вибуху і розширюваного Всесвіту.



**Рис. 1.1. Викривлена  
поверхня кулі**

Концепція розширюваного Всесвіту була підтверджена спостереженнями астронома Е. Хаббла [15]. Він встановив, що Галактики і їх скупчення віддаляються один від одного із швидкістю, пропорційною відстані між ними. З цією теорією перекликається теорія великого вибуху Г. Гамова. Згідно з нею, був момент, коли вся речовина Всесвіту знаходилася в надщільному нестійкому стані. Через це розміри Всесвіту почали збільшуватися за експоненціальним законом і за короткий час Всесвіт «роздувся», розрісся до дуже великих розмірів. Дослідження підтвердили наявність реліктового випромінювання, передбаченого Г. Гамо-

вим, яке відокремилося від речовини і охолонуло до  $10^{\circ} - 3^{\circ} \text{ K}$  [14]. За даними космічної обсерваторії WMAP температура реліктового випромінювання  $2.72548^{\circ} \pm 0.00057^{\circ} \text{ K}$ .

Всі ці дослідження дали можливість стверджувати, що простір можна вважати плоским аж до відстаней  $10^{26}$  метрів, близьких до розміру Всесвіту, не виключаючи кривини поблизу тяжіючих мас (яке дуже мале, але підтверджується експериментально). На малих відстанях, приблизно рівних розмірам атомного ядра, простір також евклідовий, про що свідчать результати експериментів з елементарними частинками. Тільки на відстанях приблизно  $10^{-35}$  метрів можна очікувати істотного відхилення простору від евклідовості.

### **Час**

Всі механічні процеси і явища здійснюються не лише в просторі, але і в часі. Світ, що оточує нас, знаходиться в процесі постійних змін. Процеси відбуваються в певній послідовності; кожен з процесів має певну тривалість. Світ знаходиться в постійному розвитку. Ці загальні властивості світу, що змінюється, у свідомості людини відбилися у вигляді поняття часу. *Під часом розуміють властивість матеріальних процесів мати певну тривалість, здійснюватись один за одним в певній послідовності, розвиватися за стадіями та етапами* [1, 6]. Час не є окремим від матерії і її руху, він є однією з форм існування матерії. Не має сенсу говорити про час, який є сам по собі, уявлення про плин часу поза зв'язком з матеріальними процесами є безглуздом. Модель реального часу в класичній механіці – так званий ньютонівський час. Класична механіка Ньютона постулює абсолютний час. Це означає, що ньютонівський час можна розглядати як одновимірну Евклідову пряму, кожна точка якої відповідає деякому моменту часу. Ньютонівський час однорідний, тобто всі моменти часу рівноп-

равні [2, 14]. Однорідність часу проявляється в тому, що результати експерименту за усіх інших рівних умов не залежать від часу початку експерименту. В класичній механіці час розглядають, як аргумент зміни стану механічної системи. Час вимірюють годинами. Це тіло або система тіл, в яких здійснюється який-небудь періодичний процес: коливання маятника, обертання Землі навколо власної осі. Узявши за основу один з таких процесів, можна сконструювати еталонний годинник і еталон часу, які йдуть рівномірно, і по них можна градувати всі інші годинники. Щоб правильно описувати механічний рух, необхідно використати нерухомі відносно тіла відліку годинники, водночас в кожній точці простору для фіксації положення матеріальної точки в принципі має бути свій власний годинник. Всі такі годинники повинні мати однакові початки відліку і мати однаковий темп ходу, тобто вони мають бути синхронізовані між собою.

Істотною особливістю часу є його безповоротність, однонаправленість. Ця особливість цілком пов'язана з певною спрямованістю мимовільних процесів [6]. Наприклад, нагріті тіла з часом охолоджуються, але холодні самі по собі не стають теплішими. Підстрибуючи, м'яч зупиняється, але м'яч в стані спокою не почне підстрибувати самостійно. Отже, час має цілком певний напрямок, що уможлиблює відрізнити минуле від сьогодення і майбутнього.

## **1.2 Кінематика**

Класична механіка описує стан і зміну стану механічної системи. Під станом механічної системи в певний момент часу розуміють деяку ситуацію, реалізовану в системі в цей момент. Стан механічної системи визначений, якщо відомі всі фізичні величини, що характеризують механічну систему. Стан механічної системи змінюється в процесі її руху, оскільки

невід’ємною властивістю матерії є її рух в просторі і в часі. Найбільш простою формою руху тіл є їх переміщення один відносно іншого. Будь-яка інша форма руху є складнішою. Тому в розвитку знань перш за все отримала розвиток теорія простого переміщення, що і є предметом класичної механіки. Рухом в механіці називають зміну положення тіла в просторі за деякий час. Під положенням в просторі тут розуміють положення тіла відносно інших тіл.

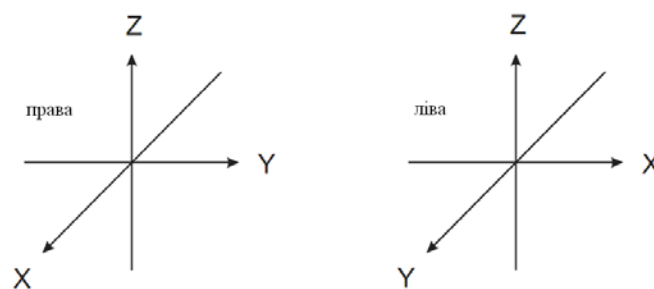
Термін «кінематика» пішов від слова κίνηματος (кинематос), що означає рух по-грецьки. **Кінематика – розділ механіки, який описує рух тіл без урахування причин, що його викликають.** В класичній механіці Ньютона просторові і часові координати, необхідні для опису руху тіла, розглядають незалежно один від одного. Простір є 3-вимірним Евклідовим, час – абсолютним, тобто таким, що протікає однаково в усіх точках простору. Такий підхід є наближенням, але цього наближення вистачає, щоб на практиці точно вирішувати завдання механіки Ньютона, тобто для розгляду рухів із швидкостями, малими в порівнянні із швидкістю світла. Друге обмеження класичної механіки полягає в її непридатності до опису явищ мікросвіту, тобто до руху тіл малої маси в обмежених частинах простору. Отже, класична механіка вивчає повільні рухи макроскопічних тіл.

Для теоретичного опису руху вводять поняття (або використовують модель) матеріальної точки (частинки). Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна нехтувати порівняно з тими відстанями, на які тіло може переміщуватись під час свого руху. Наприклад, будь-яку планету Сонячної системи можна вважати матеріальною точкою для вивчення її руху навколо Сонця. Супутник Землі – матеріальна точка під час його руху по земній орбіті.

Положення точки може бути визначене тільки по відношенню до яких-небудь протяжних тіл – так званих тіл відліку, або систем відліку. До того

ж для всіх матеріальних тіл, що вивчаються в механіці, не беруть до уваги їх атомно-молекулярну (внутрішню) будову.

Положення точок в просторі відносно системи відліку характеризують їх координатами введенням системи координат – вибором одиниці довжини для відліку відстаней, прямих кутів і т.д. Таким чином, система координат – це правила відліку відстаней, кутів та інших величин, що уможливають встановлення положення матеріальної точки в просторі відносно тіла відліку.



**Рис. 1.2. Права і ліва системи координат**

Тіло відліку, система координат і годинник складають систему відліку. Годинник може бути один або може бути сукупність годинників, розставлених досить часто і нерухомих відносно тіла відліку. Вибір системи координат диктується міркуваннями зручності і простотою опису руху. Для механічного опису руху тіло відліку будують у вигляді трьох взаємно перпендикулярних стержнів (відрізків), що перетинаються в деякій точці  $O$  (рис. 1.2). На кожному відрізку задають одиницю масштабу і позитивні (додатні) напрямки, перетворюючи їх на координатні осі декартової системи координат. Розрізняють два види координатних систем – праву і ліву. Ніяким просторовим поворотом їх не можна поєднати одну з одною. Ліва переходить в праву, якщо замінити  $x$  на  $-x$  ( $x \rightarrow (-x)$ ). Після цього обидві системи можна поєднати взаємним поворотом і переміщенням в просторі. Таку операцію (заміну  $x \rightarrow (-x)$ ) називають дзеркальним відображенням в площині  $ZY$ . Ліва система переходить у праву також, якщо змінити напрям-

моє усіх трьох координатних осей:

$$\begin{cases} x \rightarrow (-x); \\ y \rightarrow (-y); \\ z \rightarrow (-z); \end{cases}$$

з подальшим поворотом. Операція зміни знаку усіх трьох осей називають інверсією.

Закони природи, безсумнівно, повинні бути записані у формі, яка не залежить від вибору системи координат. Надалі використовуватимемо праву систему координат. Це означає, що перехід від позитивного кінця  $x$  до позитивного кінця  $y$ , якщо дивитися з верхнього кінця координати  $z$ , виконується проти годинникової стрілки. Положення будь-якої точки в обраній таким чином системі координат задають трьома числами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  як координати точки, тобто, це є відстанню цієї точки до координатних осей.

Коротко підведемо підсумки [1, 2].

1. Кінематика – розділ механіки, який описує рух тіл без урахування причин, що викликають цей рух. В механіці Ньютона (класичній механіці) просторові і часові координати, необхідні для опису руху тіла, розглядаються незалежно один від одного. Простір є 3-вимірним і Евклідовим, а час – абсолютним, тобто таким, що протікає однаково в усіх точках простору. Результати виміру часу не залежать від руху годинника в цьому просторі. Такий підхід описує реальні властивості простору і часу лише приблизно, але це наближення дає достатню для практики точність для рішення завдань механіки Ньютона, до того ж розглядається рух із швидкостями, малими порівняно із швидкістю світла, тобто  $v \ll c$ .

2. Важливим поняттям для кінематики є поняття матеріальної точки (частинки). Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна нехтувати порівняно з характерними відстанями, на які переміщується тіло. В геометричному сенсі матеріальна точка еквівалентна математичній точці, тобто

вважається, що вона не має внутрішньої структури, форми і розмірів. Завдання кінематики точки полягає в тому, щоб повністю описати рух точки, тобто визначити її положення, швидкість, прискорення і інші характеристики руху в будь-який момент часу.

3. Положення точки може бути визначене тільки по відношенню до яких-небудь протяжних тіл – тіл відліку. З тілом відліку нерухомо пов'язують деяку систему координат і визначають положення точки у вибраній системі координат. Тіло відліку, система координат і годинник, необхідний для реєстрації положення точки в різні моменти часу, складають систему відліку. Будують тіло відліку в обмеженій області простору у вигляді трьох взаємно перпендикулярних стержнів, що перетинаються в точці  $O$ . На кожному стержні задають одиницю масштабу і додатний напрямок, перетворивши їх таким чином в координатні осі  $x, y, z$ . Тоді говорять, що в просторі задана система координат. В механіці Ньютона користуються або одним годинником, що супроводжує рухоме тіло, або сукупністю годинників, розставлених досить часто і нерухомих відносно тіла відліку. В цьому випадку годинники повинні мати однакову швидкість ходу і бути синхронізованими, щоб користуватися єдиним для всієї системи відліку часом. Показання нерухомих годинників та рухомих вважаються однаковими.

### 1.3 Способи опису руху матеріальної точки

#### Траєкторія

Якщо точки простору, в яких знаходиться матеріальна рухома точка в послідовні моменти часу, з'єднати між собою деякою безперервною кривою, то таку криву називають **траєкторією**. Вид траєкторії залежить від системи відліку, по відношенню до якої вона описується.



Описати рух точки – означає задати спосіб, що дає можливість визначити її положення відносно вибраної системи відліку у будь-який момент часу. Відомі три основні способи задання руху: природний, координатний, векторний [1, 2, 6].

### 1. Природний спосіб.

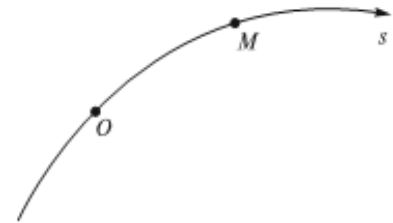
В цьому способі задають:

1) траєкторію руху точки  $M$  відносно вибраної системи координат;

2) початок відліку – деяку точку  $O$  на траєкторії руху;

3) позитивний напрямок відліку координати  $s$  уздовж траєкторії;

4) закон руху точки  $M$  уздовж траєкторії у вигляді функції  $s = f(t)$  (рис. 1.3).



**Рис. 1.3. Природний спосіб задання руху**

Функція  $f(t)$  повинна бути:

а) однозначною, тобто рухома точка, для  $t = t_1$  не може знаходитись в різних точках простору;

б) безперервною;

в) такою, що диференціюється.

Закон руху  $s = f(t)$  може бути заданий не лише аналітично, але і графічно.

### 2. Координатний спосіб.

В цьому випадку закон руху – це залежність вибраних координат рухомої точки від часу

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \quad (1.1)$$

у декартовій системі координат. Всі ці функції повинні задовольняти тим же вимогам, що і у попередньому випадку (а, б, в). Завдання рівняння ко-

ординатним способом у виді  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$  є також рівнянням траєкторії в параметричному виді, де роль параметра виконує час  $t$ .

### 3. Векторний спосіб.

В цьому випадку положення точки задають за допомогою радіус-вектора, проведеного в цю точку з початку відліку. Закон руху представляють у вигляді

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1.2)$$

В процесі руху матеріальної точки її радіус-вектор в загальному випадку змінюється і за величиною, і за напрямком. Кінець радіус-вектора  $\mathbf{r}(t)$  рухається по траєкторії, що називається годографом вектора  $\mathbf{r}$ . Це геометричне місце кінців радіус-вектора частинки. Для рішення конкретних задач використовують зв'язок з координатним способом опису. В декартовій системі координат будь-який вектор можна задати його проекціями на осі координат, які співпадають з його координатами (рис. 1.4):

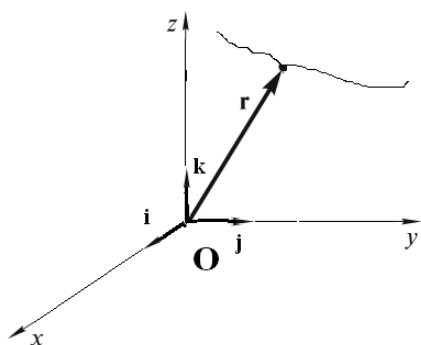


Рис. 1.4. Векторний спосіб задання руху

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (1.3)$$

де  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – проекції радіус-вектора  $\mathbf{r}(t)$  на осі  $x, y, z$  в момент часу  $t$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – одиничні орти (вектори), напрямок яких співпадає з додатним напрямком уздовж координатних осей.

### 1.3.1 Переміщення, швидкість і прискорення

#### Переміщення

Розглянемо рух точки по криволінійній траєкторії. Зміну положення точки за певний час характеризують вектором переміщення (рис. 1.5):

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k} . \quad (1.4)$$

Вектор переміщення чисельно дорівнює відстані між кінцевою і початковою точками траєкторії. Він спрямований від початкової точки до кінцевої і сполучає точки траєкторії, в яких рухома матеріальна точка знаходиться в послідовні моменти часу. Очевидно,  $|\Delta \mathbf{r}| < |\Delta s|$ , де  $|\Delta s|$  – зміщення точки уздовж криволінійної траєкторії. Для  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|} = 1 .$$

Для прямолінійного руху  $|\Delta \mathbf{r}| = |\Delta s|$ .

### Швидкість

Відношення переміщення матеріальної точки  $\Delta \mathbf{r}$  до відповідного інтервалу часу  $\Delta t$  є величина середньої швидкості матеріальної точки за проміжок часу  $t, t + \Delta t$  для векторного і координатного способів опису руху:

$$\mathbf{v}_{\text{сеп}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{k} . \quad (1.5)$$

Видно, що  $\mathbf{v}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  – вектор, колінеарний вектору переміщення  $\Delta \mathbf{r}$ , тобто

середня швидкість матеріальної точки – це вектор, спрямований по хорді у бік руху (рис. 1.6). Миттєву швидкість точки в цей конкретний момент часу  $t$  визначають, як межу, до якої прямує середня швидкість  $\mathbf{v}_{\text{сеп}}$ , коли  $\Delta t \rightarrow 0$ . Це векторна величина, яка дорівнює першій похідній від радіус-вектора матеріальної точки за часом:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} , \quad (1.6)$$

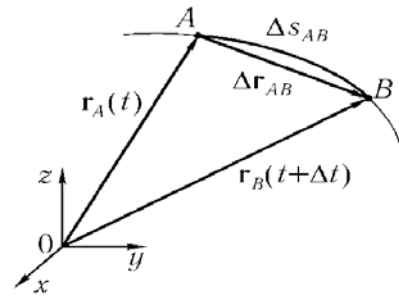
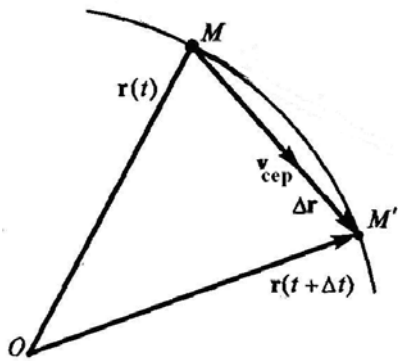


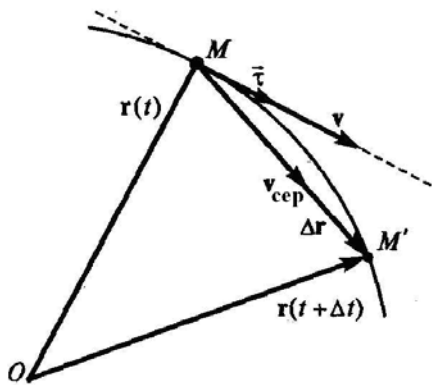
Рис. 1.5. Переміщення точки (вектор  $\Delta \mathbf{r}_{AB}$ ) і зміщення  $\Delta s_{AB}$  уздовж траєкторії



**Рис. 1.6.** Напрямок вектора середньої швидкості  $v_{\text{сеп}}$

для модуля вектора через його проекції. Для абсолютної величини швидкості отримуємо:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.7)$$



**Рис. 1.7.** Напрямок вектора миттєвої швидкості  $v(t)$

де  $v_x, v_y, v_z$  – проекції швидкості матеріальної точки на осі прямолінійної декартової системи координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Точка над координатою означає диференціювання цієї координати за часом. Величину швидкості виражають за загальною формулою

На рис 1.7. видно, що в межі, коли  $\Delta t \rightarrow 0$  напрямок вектора  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  співпадатиме з напрямком дотичної до траєкторії, тому вектор  $\mathbf{v}(t)$  у будь-який момент часу спрямований по дотичній до траєкторії руху матеріальної точки.

Якщо рух заданий природним способом, через параметри траєкторії, то в цьому випадку відомі траєкторія і залежність шляху від часу. Пройдений шлях відлічують від точки траєкторії, прийнятої за початкову. Кожну точку траєкторії характеризують певним значенням  $s$ . Отже, її радіус-вектор є функцією  $s$ , і її траєкторія може бути описана рівнянням:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s); \quad s = s(t); \quad \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}[s(t)].$$

Отже, у формулі  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  функція  $\mathbf{r}(t)$  є складною функцією, і обчислю-

вати похідну треба за правилом диференціювання складної функції:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Величина  $\Delta s$  – відстань між двома точками уздовж траєкторії,  $|\Delta \mathbf{r}|$  – відстань між цими точками по прямій лінії. Очевидно, у міру зближення точок різниця цих двох величин зменшується, тому можна написати:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \cdot \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau}, \quad (1.8)$$

де  $\boldsymbol{\tau}$  – одиничний вектор дотичної до траєкторії. Крім того,  $\frac{ds}{dt} = v$  – величина швидкості  $\mathbf{v}$ . Напрямок  $\boldsymbol{\tau}$  співпадає з позитивним напрямком відліку координати  $s$ . Тому для швидкості можна написати співвідношення:

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}. \quad (1.9)$$

Звідси виходить, що вектор швидкості може бути представлений, як добуток величини швидкості (її модуля) і одиничного вектора  $\boldsymbol{\tau}$  ( $|\boldsymbol{\tau}| = 1$ ), спрямованого по дотичній в цій точці траєкторії. Під час руху матеріальної точки по криволінійній траєкторії напрямок цього вектора (але не його модуль!) безперервно змінюється, оскільки змінюється положення дотичної. Вектор  $\boldsymbol{\tau}$ , таким чином, характеризує зміну напрямку швидкості.

Оскільки  $\frac{ds}{dt} = v$ , то, знаючи початкове положення точки і залежність швидкості від часу, можна знайти координату точки  $s$  у будь-який момент часу  $t$ :

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t) dt,$$

де  $s(0)$  – координата матеріальної точки в початковий момент часу  $t = 0$ . Довжина шляху  $l$ , пройдена точкою по траєкторії за цей час, визначається

формулою:

$$l(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(t)| dt = \int_0^t v(t) dt.$$

Для  $v = v_0 = \text{const}$   $s(t) = s(0) + v_0 t$ ;  $l(t) = |v_0| t$ .

### Прискорення

Прискоренням називають швидкість зміни швидкості. Нехай точка  $M$  рухається по своїй траєкторії і в момент часу  $t$  має швидкість  $\mathbf{v}(t)$ , у момент часу  $t + \Delta t$  має швидкість  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ . Приріст швидкості за проміжок часу  $\Delta t$  – це вектор  $\Delta \mathbf{v}$ . Розділивши  $\Delta \mathbf{v}$  на  $\Delta t$ , отримаємо векторну величину

$$\mathbf{a}_{\text{сеп}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (1.10)$$

яку називають середнім прискоренням матеріальної точки за проміжок часу  $t, t + \Delta t$ . Напрямок векторів  $\mathbf{a}_{\text{сеп}}$  і  $\Delta \mathbf{v}$  співпадають, ці вектори колінеарні (рис. 1.8). Прискорення точки в момент часу  $t$  (миттєве прискорення) визначають як межу, до якої наближається середнє прискорення, коли

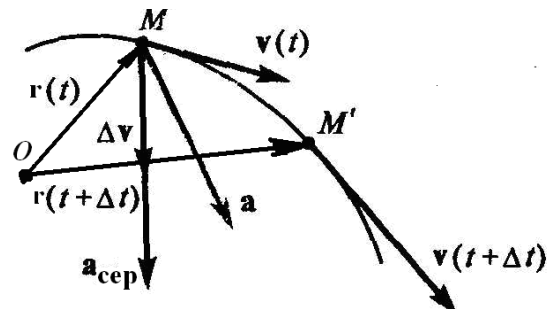


Рис. 1.8. Напрямок векторів середнього прискорення  $\mathbf{a}_{\text{сеп}}$  і приросту швидкості  $\Delta \mathbf{v}$

$\Delta t \rightarrow 0$ . Це векторна величина, що дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіус-вектора точки за часом:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (1.11)$$

де  $a_x, a_y, a_z$  – проекції прискорення матеріальної точки на осі прямокутної декартової системи координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

де дві точки над змінною означають узяття другої похідної. Абсолютна величина прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (1.12)$$

Безсумнівно, геометрично вектор **a** знаходиться по ту ж сторону від дотичної до траєкторії в точці М, що і вектор **a**<sub>сеп</sub>, тобто спрямований у бік угнутості траєкторії (див. рис. 1.8). Знаючи залежність **a**(t), можна вирішити зворотну задачу: визначити значення швидкості **v**(t) і положення матеріальної точки (її радіус-вектор) в довільний момент часу t:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt;$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt,$$

де **v**(0), **r**(0) – швидкість і радіус-вектор матеріальної точки в початковий момент часу (t = 0). Обчислення проводять в координатному способі для відомих величин  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $a_z(t)$ ,  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$ .

### **Приклади** [8, 11]

1. Нехай  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$ , де **b**, **c** – сталі вектори. Знайти **v**(t), **a**(t).

За визначенням  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}t$ ;  $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 + 2\mathbf{c}$ . Отже, швидкість

матеріальної точки є лінійною функцією часу, і точка рухається зі сталим прискоренням.

2. Тіло кинули в поле тяжіння Землі зі сталої швидкістю **v**<sub>0</sub> з точки, яка має радіус-вектор **r**<sub>0</sub> відносно початку 3-вимірної декартової системи координат. Знайти зміну в часі швидкості точки **v**(t) і її положення **r**(t). Опір

атмосфери не враховувати. Вважати, що  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t=0)$ .

В цьому випадку  $\mathbf{a} = \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \text{const}$  – прискорення вільного падіння. Далі,  $d\mathbf{v} = \mathbf{g}dt$ ;  $\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}(t)} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{g}dt$ . Після інтегрування обох частин рівності отримуємо  $\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g}t$  або  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$ . Оскільки  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , то  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ ;  $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(t)dt = \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t)dt$ . Інтегруючи обидві частини рівності, маємо:  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}$ . Остаточного отримуємо:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}$ . Радіус-вектор матеріальної точки змінюється за параболічним законом.

### 1.3.2 Нормальне і тангенціальне прискорення

Розглянемо більш детально питання про напрямок, тобто орієнтацію прискорення відносно швидкості і траєкторії руху. Миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу  $t$  завжди дотична до траєкторії руху, але вона може змінюватись як за величиною, так і за напрямком. Тобто, прискорення може бути спрямоване під будь-яким кутом до дотичної до траєкторії руху [1]. Вище ми отримали, що для природного способу завдання руху швидкість може бути представлена у вигляді (1.9)

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau},$$

де  $v$  – величина швидкості, її модуль,  $v = |\mathbf{v}|$ , а  $\boldsymbol{\tau}$  – одиничний вектор, спрямований по дотичній до траєкторії у бік позитивного напрямку,

$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ . Для отримання вектора прискорення необхідно обчислити похідну

за часом від вектора швидкості  $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$  за правилами обчислення похідної



від складної функції, оскільки під час руху по криволінійній траєкторії може мінятися і напрямок, і величина швидкості:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \quad (1.13)$$

Перший доданок – це вектор  $\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$ , спрямований по дотичній до траєкторії.

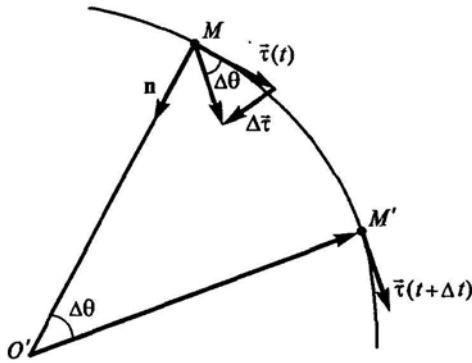


Рис. 1.9. Напрямок вектора  $\Delta\boldsymbol{\tau}(t)$

Він є тангенціальною (дотичною) складовою прискорення точки і пов'язаний із зміною величини швидкості.

Розглянемо другий доданок, знайдемо його значення і визначимо його сенс. За визначенням

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\tau}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\tau}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}.$$

Коли  $\Delta t \rightarrow 0$ , вектор  $\Delta\boldsymbol{\tau}(t)$  наближатиметься до напрямку одиничного вектора нормалі  $\mathbf{n}$  до траєкторії в точці M. За своєю абсолютною величиною, зважаючи на малість величин  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\tau$

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{\tau}| \cdot |\Delta\theta| = |\Delta\theta|,$$

остільки  $|\boldsymbol{\tau}| = 1$ , а сам вектор  $\Delta\boldsymbol{\tau} = \Delta\theta \cdot \mathbf{n}$  (рис. 1.9). Звідси знаходимо, що

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \mathbf{n} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \mathbf{n} = \frac{1}{R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.14)$$

де  $R = \frac{ds}{d\theta}$  – радіус кривизни траєкторії в цій точці траєкторії, в точці M, проведений з центру кривизни траєкторії, розташованого на нормалі  $\mathbf{n}$  на відстані R. Радіус кривизни траєкторії має значення межі радіусу кола, проведеного через три точки кривої при наближенні цих точок до даної точки [6]. Для довільної кривої величина R в різних точках різна.

Таким чином, другий доданок вектора прискорення  $\mathbf{a}$  має вигляд:

$$\mathbf{v} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v}}{R} \mathbf{n} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (1.15)$$

Ця складова прискорення спрямована по нормалі  $\mathbf{n}$  до центру кривизни траєкторії в даній точці і пов'язана зі зміною вектора швидкості  $\mathbf{v}$  за напрямком. Остаточно для вектора прискорення  $\mathbf{a}$  отримуємо:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} = a_{\tau} \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n} = \mathbf{a}_{\tau} + \mathbf{a}_n, \quad (1.16)$$

де  $a_{\tau}$ ,  $a_n$  – проекції прискорення  $\mathbf{a}$  на напрямки дотичної і нормалі до траєкторії руху відповідно (рис. 1.10). Їх називають тангенціальним (дотичним) прискоренням  $a_{\tau}$  і нормальним  $a_n$  прискоренням матеріальної точки.

Оскільки  $\mathbf{a}_{\tau}$  перпендикулярне  $\mathbf{a}_n$ , модуль повного прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.17)$$

Проаналізуємо якісно рух матеріальної точки по криволінійній траєкторії. Швидкість точки зростає, якщо кут між векторами  $\mathbf{v}$  і повним прискоренням  $\mathbf{a}$  гострий і зменшується, якщо цей кут тупий

(рис. 1.11). В разі, якщо  $a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0$ , точка має

тільки нормальне прискорення,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$ , швидкість точки постійна, або досягає екстремуму. Аналогі-

чно, якщо  $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$ , то вектор повного прискорення  $\mathbf{a}$  буде спрямований по дотичній до траєкторії. Це має місце, якщо

$v = 0$  (точка повороту, тобто зміна напрямку руху на протилежне), або в точці перегину траєкторії (рис. 1.11). Якщо повне прискорення  $\mathbf{a} = 0$  ( $a_{\tau} = 0$ ,  $a_n = 0$ ), то точка рухається рівномірно і прямолінійно відносно вибраної системи відліку.

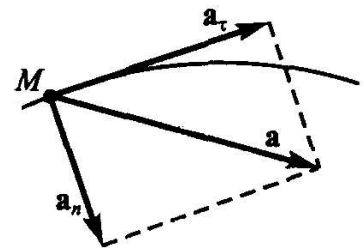


Рис. 1.10. Напрямки тангенціального і нормального прискорень

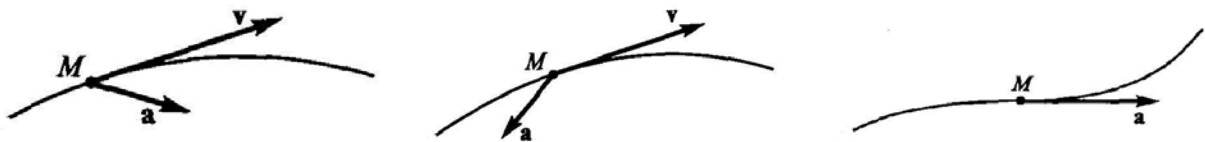


Рис. 1.11. Швидкість точки М зростає (праворуч), зменшується (у центрі), прискорення в точці перегину (ліворуч)

### Приклад [6]

Якщо не враховувати опір атмосфери, то тіло, кинуте під кутом до горизонту в однорідному полі сили тяжіння, летить по параболі. Розглянемо точки траєкторії А, В, С. Повне прискорення в точках А, В, і С дорівнює  $g$ . На ділянці ОВ рух уповільнений, кут векторів  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{g}$  тупий.

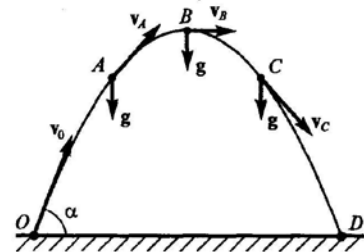


Рис. 1.12. Рух точки по параболі

На ділянці BD рух прискорений, кут векторів  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{g}$  гострий. В точці В  $\mathbf{a}_n = \mathbf{g}$ ,  $a_\tau = 0$ , матеріальна точка мов би на мить зависає. Знаючи швидкість точки і її нормальне прискорення  $\mathbf{a}_n$  у будь-якій точці траєкторії, можна вичислити радіус кривизни траєкторії:

$$R = \frac{v^2}{a_n}.$$

### 1.3.3 Рух по колу

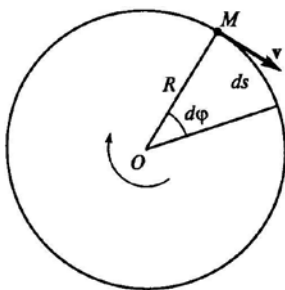


Рис. 1.13. Рух по колу

Розглянемо рух матеріальної точки по колу з постійним радіусом  $R$ . Цей рух розглядають в площині  $(x, y)$ , поєднавши початок координат з центром кола. В цій площині такий рух зручно описувати в полярній системі координат [2]. В процесі руху по колу точка проходить елементарний шлях  $ds$  і здійснює поворот відносно свого початкового положення на елементарний кут  $d\varphi$ . Пройде-

ний шлях можна виразити через радіус і кут повороту співвідношенням (рис. 1.13):

$$ds = R d\varphi.$$

Звідси лінійна швидкість руху по колу

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.18)$$

Величину  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  називають кутовою швидкістю обертального руху. Таким чином:  $v = \omega R$ .

Отримане співвідношення характеризує *величину* швидкості: величина лінійної швидкості є добуток величини кутової швидкості на радіус кола. Для характеристики швидкості важливо не лише її величина, але і напрямок. Ясно, що вектор лінійної швидкості у будь-який момент часу спрямований по дотичній до кола і перпендикулярний радіусу  $R$ . Вираз для *вектора* швидкості вимагає додаткового розгляду.

Рух по колу характеризують не лише радіусом і кутовою швидкістю, але й положенням площини, в якій відбувається рух [1]. Орієнтацію цієї площини в просторі задають напрямком перпендикуляра до неї, а рух по колу характеризують віссю обертання, що проходить через центр кола перпендикулярно до нього. Задають елементарне кутове переміщення, що характеризується не лише своїм значенням, але і площиною, в якій це відбувається. Для фіксації цієї площини елементарне кутове переміщення розглядають як вектор  $d\varphi$ , перпендикулярний цій площині. Напрямок цього вектора вибирають так, щоб спостерігач, дивлячись з кінця вектора  $d\varphi$ , бачив, що круговий рух точки здійснюється проти годинникової стрілки, тобто за правилом правого гвинта (рис. 1.14). Виходячи з цього, елементарне переміщення уздовж траєкторії може бути записане так:

$$d\mathbf{R} = [d\phi \mathbf{R}], \quad (1.19)$$

тобто описується формулою Ейлера. Для вектора лінійної швидкості  $\mathbf{v}$  отримуємо:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}[d\phi \mathbf{R}] = \left[ \frac{d\phi}{dt} \mathbf{R} \right] = [\omega \mathbf{R}], \quad (1.20)$$

де  $\omega = \frac{d\phi}{dt}$  – вектор кутової швидкості матеріальної точки,  $|\omega| = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{|d\phi|}{dt}$ .

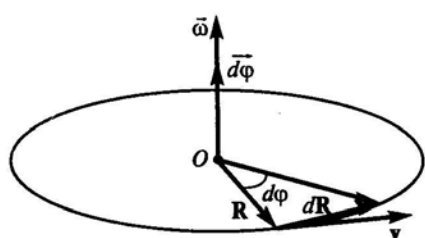


Рис. 1.14. Напрямки векторів під час руху по колу

Кутова швидкість є вектором, оскільки  $d\phi$  – вектор, а  $dt$  – скаляр. Очевидно, що напрямки  $\omega$  і  $d\phi$  співпадають. Знайдемо величину  $a_\tau$  диференціюванням за часом виразу:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = \beta R,$$

де  $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$  – величина кутового прискорення обертального руху. Кутове прискорення теж вектор  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ , спря-

мований уздовж осі колового руху. Водночас напрямок  $\beta$  співпадає з напрямком  $\omega$  для  $\omega > 0$ , і протилежний для  $\omega < 0$ . Величина нормального прискорення  $a_n$ :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R.$$

Під час руху по колу це прискорення називають доцентровим, оскільки вектор  $\mathbf{a}_n$  спрямований до центру кола. Модуль прискорення під час руху по колу є:

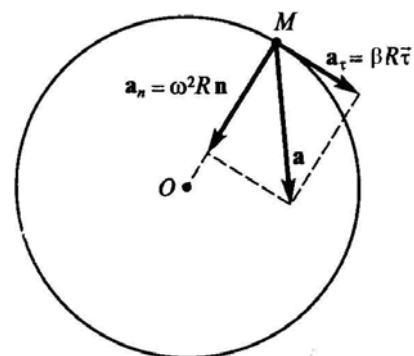


Рис. 1.15. Напрямки векторів  $\mathbf{a}_n$  і  $\mathbf{a}_\tau$  під час руху по колу

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \beta^2 R^2} = R \sqrt{\omega^4 + \beta^2}.$$

Якщо  $\mathbf{v} = \text{const}$ , то  $\mathbf{a}_\tau = 0$  і повне прискорення буде тільки доцентровим. Знайдемо вектор повного прискорення матеріальної точки під час руху по колу. Для цього обчислимо похідну за часом від вектора лінійної швидкості (1.20):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}] = \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{R} \right] + \left[ \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right] = [\boldsymbol{\beta} \mathbf{R}] + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}]. \quad (1.21)$$

В цьому випадку напрямок вектора кутового прискорення  $\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$  співпадає з віссю обертання. Отже, вектор  $[\boldsymbol{\beta} \mathbf{R}]$  в доданку спрямований по дотичній до траєкторії і є тангенціальним прискоренням (рис. 1.15). Другий доданок дає нормальне прискорення:

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}] = [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]] = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}) - \mathbf{R}\omega^2 = -\mathbf{R}\omega^2, \quad (1.22)$$

де скалярний добуток  $(\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}) = 0$ , оскільки вектори  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{R}$  взаємно перпендикулярні. Вектор  $(-\mathbf{R}\omega^2)$  спрямований в протилежну від вектора  $\mathbf{R}$  сторону до центру кола (рис. 1.15). Таким чином

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\beta} \mathbf{R}], \quad \mathbf{a}_n = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}], \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau. \quad (1.23)$$

Ці формули справедливі, коли вісь обертання не змінює свого напрямку (положення) в просторі.

З диференціальної геометрії відомо, що, якщо  $d\boldsymbol{\phi}_1$  і  $d\boldsymbol{\phi}_2$  – два кутові елементарні переміщення, то  $d\boldsymbol{\phi}_3 = d\boldsymbol{\phi}_1 + d\boldsymbol{\phi}_2$  також вектор елементарного кутового переміщення, тобто елементарні кутові переміщення додають як вектори. Насправді, якщо з точки  $O$  провести сферу радіусом, рівним одиниці, то на поверхні сфери цим кутам відповідатимуть нескінченно малі дуги  $d\mathbf{l}_1$ ,  $d\mathbf{l}_2$  (рис. 1.16). Нескінченно мала дуга  $d\mathbf{l}_3$  складає третю частину трикутника. Цей нескінченно малий трикутник можна вважати плоским. Вектори  $d\boldsymbol{\phi}_1$ ,  $d\boldsymbol{\phi}_2$ ,  $d\boldsymbol{\phi}_3$  спрямовані перпендикулярно сторонам цього три-

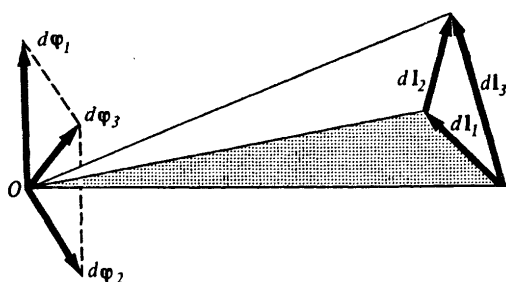
кутника і лежать в його площині. Для них має місце векторна рівність:

$$d\varphi_3 = d\varphi_1 + d\varphi_2,$$

два повороти  $d\varphi_1$  і  $d\varphi_2$  еквівалентні одному повороту на кут  $d\varphi_3 = d\varphi_1 + d\varphi_2$  навколо осі. Отже, елементарне кутове переміщення є вектором. Переміщення на кінцевий кут не є вектором.

## 1.4 Одиниці фізичних величин

Вимірювання фізичних величин – це операція порівняння величини, що вимірюється, з еталонною величиною, прийнятою за одиницю. В принципі для кожної величини можна вибрати свій еталон, але це неможливо, оскільки



**Рис. 1.16.** До доказу векторного характеру елементарних кутових переміщень

фізичних величин досить багато. Тому еталони створюють для скінченного числа фізичних величин, а одиниці інших величин отримують із співвідношень еталонної величини з іншими величинами, що містяться у фізичних формулах. Наприклад, модуль

швидкості пов'язаний з модулем переміщення формулою  $v = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$ , тому

немає необхідності окремо будувати еталон модуля швидкості. В міжнародній системі одиниць СІ (SI) основними одиницями, для яких існують еталони, є: одиниця довжини – метр (М); одиниця часу – секунда (С); одиниці маси – кілограм (Кг); одиниця сили струму – ампер (А); одиниця температури – кельвін (К); одиниця сили світла – кандела (кд); одиниця кількості речовини – моль (моль). Система СІ є системою МКС: метр – кілограм – секунда [5].

Звідси виходить, що одиницею швидкості в СІ є  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ , прискорення –  $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ,  $[v] = \frac{\text{Л}}{\text{Т}}$ ,  $[a] = \frac{\text{Л}}{\text{Т}^2}$ . Одиницею кутової швидкості в системі СІ є  $1 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}}$ ;  $1 \frac{\text{об}}{\text{мин}} = \frac{2\pi}{60\text{с}} = 0.1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Одиниця кутового прискорення в системі СІ є  $1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \frac{1}{\text{с}^2}$ ,  $[\omega] = \frac{1}{\text{Т}}$ ,  $[\beta] = \frac{1}{\text{Т}^2}$ .

## 1.5 Кінематика руху твердого тіла

### 1.5.1 Види руху твердого тіла

Твердим тілом назвемо сукупність матеріальних точок, відстань між якими фіксована [3]. Рух твердого тіла зводиться до руху складових його точок. Рух кожної точки описується трьома координатами. Тверде тіло – це тіло, яке практично не здатне деформуватися, хоча і можливі виникнення внутрішньої напруги. Таким чином, якщо тверде тіло складається з  $N$  точок, то його рух повинен описуватися  $3n$  координатами. Проте, вони не є незалежними, тому що відстані між двома будь-якими точками в твердому тілі постійні. Наприклад, якщо одна вільна матеріальна точка має 3 ступені свободи, тобто для опису її руху використовують три змінних ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), то дві матеріальні точки, жорстко пов'язані між собою, мають  $3 + 3 - 1 = 5$  ступенів свободи, тобто їх рух може описуватись тільки 5-тьма змінними, оскільки в цьому випадку координати точок  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  не є незалежними величинами, а пов'язані співвідношенням:

$$d^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2,$$

де  $d$  – відстань між точками, і ця відстань фіксована. Число незалежних параметрів (координат), якими визначають рух матеріальних точок, нази-



вають числом ступенів свободи. Тому для двох матеріальних точок, жорстко пов'язаних незмінністю відстаней між собою, 6 координат вже не є незалежними, а залишається тільки 5 незалежних параметрів. Для опису просторового положення твердого тіла досить вибрати будь-які 3 точки, що не лежать на одній прямій. Положення цих точок в просторі повністю визначає положення твердого тіла і описується 9-ма параметрами, між якими є 3 співвідношення, що виражають постійність трьох відстаней між цими точками. Отже, щоб знайти положення твердого тіла, необхідно задати в загальному випадку 6 незалежних параметрів, тобто число ступенів свободи під час руху твердого тіла дорівнює 6.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла: поступальне, обертальний, плоский, вільний, рух навколо нерухомої точки.

### **1.5.2 Обертальний рух твердого тіла**

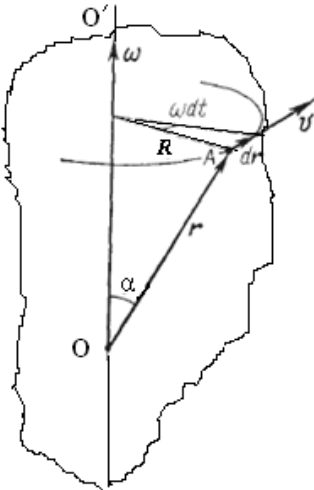
Розглянемо обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Якщо під час руху твердого тіла будь-які дві його точки весь час залишаються нерухомими, то через ці дві точки можна провести пряму, яку називають нерухомою віссю обертання. В цьому випадку тіло має лише один ступінь свободи, пов'язаний лише з кутом повороту навколо осі. Всі точки тіла рухаються по колах, що лежать в площинах, перпендикулярних осі обертання, а центри кіл лежать на цій осі. Тому для опису обертального руху використовують кутові кінематичні характеристики, однакові для всіх точок твердого тіла. Лінійні характеристики руху пов'язані з кутовими.

Розглянемо кутові характеристики обертального руху твердого тіла. Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі (рис. 1.17). Безсумнівно, кутові переміщення всіх точок тіла за один і той же проміжок часу будуть однаковими. Величину кутової швидкості визначимо співвідно-

шенням:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектор елементарного кутового переміщення  $d\varphi$  спрямований уздовж осі



**Рис. 1.17. Кутові і лінійні характеристики обертального руху твердого тіла**

обертання перпендикулярно площині обертання відповідно до правила правого буравчика: якщо руків'я буравчика повертати у напрямку обертання твердого тіла, то поступальне переміщення буравчика дає напрямок  $d\varphi$ . Звідси отримуємо:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Величину кутової швидкості характеризують її модулем  $|\omega|$ , тоді вектор  $\omega$  дає положення (орієнтацію) осі обертання в просторі і напрямок обертання. Зміну кутової швидкості характеризують

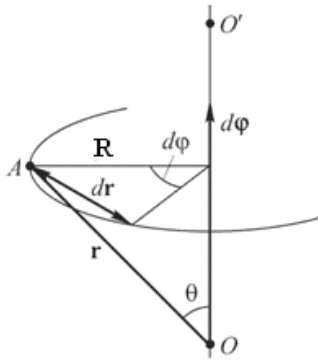
кутовим прискоренням, величина якого

$$\beta = \frac{d\omega}{dt},$$

а напрямок вектора  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$  співпадає з напрямком приросту кутової швидкості.

Розглянемо зв'язок лінійних і кутових характеристик обертального руху твердого тіла [13]. Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $OO'$  з кутовою швидкістю  $\omega$  і кутовим прискоренням  $\beta$ . Положення довільної точки  $A$  можна задати радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , проведеним з довільної точки  $O$  на осі обертання  $OO'$ . Кут між віссю і радіус-вектором позначимо  $\theta$  (рис. 1.18). За проміжок часу  $dt$  тверде тіло здійснює елементарний поворот  $d\varphi$ . Точка  $A$  рухається по колу з радіусом  $R = r \sin \theta$  з центром на осі

обертання, і здійснює переміщення  $d\mathbf{r}$  уздовж траєкторії. Модуль цього



**Рис. 1.18.** До встановлення зв'язку лінійних і кутових характеристик обертання твердого тіла

повороту  $d\phi$  і радіус-вектора  $\mathbf{r}$ :

переміщення  $|d\mathbf{r}|$  приблизно дорівнює довжині дуги кола, уздовж якого рухається точка А:

$$|d\mathbf{r}| = dr = |d\phi| \cdot R = d\phi \cdot R = d\phi \cdot r \sin\theta,$$

де  $d\mathbf{r}$  можна вважати перпендикулярним радіусу  $R$  через малість переміщення  $d\mathbf{r}$ , а

$R = r \sin\theta$ . Враховуючи останнє співвідношення, вектор переміщення  $d\mathbf{r}$  можна представити у вигляді векторного добутку елементарного

$$d\mathbf{r} = [d\phi \mathbf{r}].$$

Останнє співвідношення дає можливість знайти зв'язок між вектором лінійної швидкості  $\mathbf{v}$  точки А твердого тіла і його кутовою швидкістю:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[ \frac{d\phi}{dt} \mathbf{r} \right] = [\omega \mathbf{r}], \quad (1.24)$$

а модуль швидкості

$$v = \omega \cdot r \sin\theta = \omega \cdot R.$$

Таким чином, для твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, лінійна швидкість довільної точки А цього тіла дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла  $\omega$  і радіус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведеного в точку А з довільної точки О на осі обертання.

Вектор лінійного прискорення точки А отримаємо, обчисливши похідну за часом від вектора швидкості (1.24):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d[\omega \mathbf{r}]}{dt} = \left[ \frac{d\omega}{dt} \mathbf{r} \right] + \left[ \omega \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\beta \mathbf{r}] + [\omega \mathbf{v}] = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \quad (1.25)$$

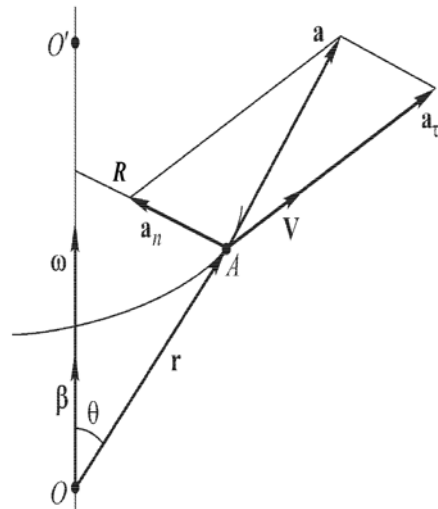
Перший доданок є тангенціальним прискоренням  $\mathbf{a}_\tau = [\beta \mathbf{r}]$ , модуль якого дорівнює  $a_\tau = \beta r \sin\theta = \beta R$ . Вектор  $\mathbf{a}_\tau$  спрямований по дотичній до кола ра-

діусу  $R = r \sin \theta$ , по якій рухається точка А. Другий доданок – це нормальне (доцентрове) прискорення точки А

$$\mathbf{a}_n = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}] = [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]], \quad \text{модуль якого}$$

$$a_n = \omega v \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega v = \omega \omega r \sin \theta = \omega^2 R.$$

Всі три вектори  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}_\tau$ ,  $\mathbf{a}_n$  лежать в одній площині, перпендикулярній осі обертання (див. рис. 1.19), а тангенціальне і нормальне складові прискорення взаємно перпендикулярні.



**Рис. 1.19. Напрямки векторів нормального, тангенціального і повного прискорень**

### Приклад

Написати рівняння залежності кутової швидкості і кута під час рівноприскореного обертання ( $\beta = \text{const}$ ) як функцію від часу. Маємо

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}; \quad \beta = \text{const}; \quad d\omega = \beta dt; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt; \quad \omega(t) = \omega_0 + \beta t;$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad d\varphi = \omega dt; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt; \quad \varphi(t) = \varphi_0(t) + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}.$$

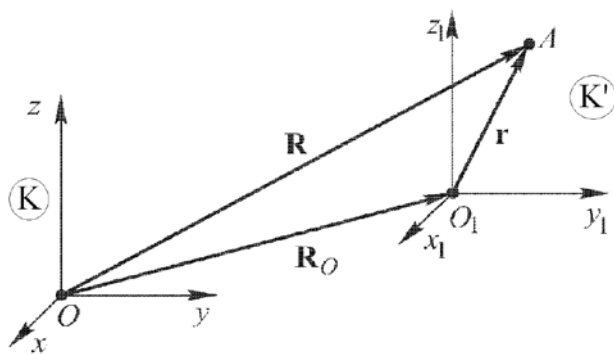
Порівняємо з формулою для рівноприскореного поступального руху і бачимо, що обидві формули мають однакову структуру.

### 1.5.3 Плоский рух твердого тіла

Рух твердого тіла, в якому траєкторії всіх його точок лежать в паралельних площинах, називають плоским. Під час такого руху вважають, що тіло обертається навколо осі  $OO'$ , перпендикулярної цим площинам, а сама вісь обертання рухається разом з тілом поступально, не змінюючи своєї

орієнтації. Якщо провести довільну пряму  $O_1O_2$ , жорстко пов'язану з тілом і перпендикулярну площинам руху (тобто  $O_1O_2$  паралельно осі  $OO'$ ), то всі точки цієї прямої рухатимуться по однакових траєкторіях з однаковими швидкостями і прискореннями, а сама пряма, так, як і вісь обертання, зберігатиме свою орієнтацію в просторі. Таким чином, для характеристики плоского або плоско-паралельного руху досить розглянути рух одного перерізу тіла. Окремим випадком плоского руху є обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

1. Перш ніж перейти до характеристики плоского руху твердого тіла, розглянемо **теорему про додавання швидкостей** [6, 13]. Розглянемо точку  $A$ , що рухається в просторі. Для опису руху цієї точки введемо дві системи відліку: одну нерухому декартову систему  $K$  ( $Oxyz$ ) з початком в точці  $O$ ,



**Рис. 1.20. До виведення теореми про додавання швидкостей**

і рухому систему  $K'$  ( $O_1x_1y_1z_1$ ) з початком в точці  $O_1$ . Система  $K'$  рухається поступально відносно системи  $K$  так, що її осі координат паралельні осям координат системи  $K$  (рис. 1.20). Точка  $A$  нехай рухається відносно сис-

теми  $K'$ .

Визначимо рух цієї точки відносно системи  $K$ . Рух точки відносно рухомої системи  $K'$  називають відносним, а по відношенню до нерухомої системи  $K$  – абсолютним. Рух самої системи  $K'$  по відношенню до нерухомої  $K$  називають переносним. Радіус-вектор, проведений з точки  $O$  до точки  $O_1$ , позначимо як  $\mathbf{R}_O$ , радіус-вектор, що сполучає точку  $A$  з початком координат системи  $K$ , точкою  $O$ , позначимо  $\mathbf{R}$ , радіус-вектор цієї ж

точки по відношенню до точки  $O_1$ , початку координат системи  $K'$ , позначимо  $\mathbf{r}$ . З рисунку видно, що в будь-який момент часу

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}. \quad (1.26)$$

Назвемо швидкість точки в нерухомій системі відліку абсолютною швидкістю  $\mathbf{v}_{\text{абс}}$ , а швидкість в рухомій системі відліку – відносною швидкістю  $\mathbf{v}_{\text{відн}}$ . За час  $dt$  точка  $A$  перемістилася відносно системи  $K'$  на деяку елементарну відстань  $d\mathbf{r}$ , одночасно система  $K'$  змістилася на елементарну відстань  $d\mathbf{R}_O$  відносно нерухомої системи  $K$ , а загальне елементарне зміщення точки  $A$  відносно нерухомої системи  $K$  складе

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_O + d\mathbf{r}. \quad (1.27)$$

Абсолютну швидкість точки знайдемо, розділивши загальне елементарне зміщення точки відносно нерухомої системи  $d\mathbf{R}$  на проміжок часу  $dt$ :

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{R}_O}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{відн}}, \quad (1.28)$$

де  $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \frac{d\mathbf{R}_O}{dt}$  – переносна швидкість системи  $K'$ , тобто швидкість системи

$K'$  відносно системи  $K$ , розглядаючи її як деяке заповнене середовище геометричних точок з незмінною відстанню між ними в процесі руху. У випадку, якщо точка  $A$  є нерухомою, можна вважати, що ця точка рухається разом з цим «твердим» геометричним середовищем, нібито захоплюючись ним. До того ж швидкості усіх точок цього «твердого» геометричного середовища однакові. Тому швидкість  $\mathbf{v}_{\text{пер}}$  тієї точки середовища, де знаходиться нерухома точка  $A$ , співпадає із швидкістю початку системи  $K'$ :

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_O.$$

Отже, з урахуванням викладеного:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{відн}}. \quad (1.29)$$

Таким чином, швидкість абсолютного руху точки дорівнює векторній сумі

відносної і переносної швидкостей, тобто швидкість точки  $\mathbf{v}_{\text{абс}}$  в нерухомій системі відліку  $K$  складається із швидкості  $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ , жорстко пов'язаної з рухомою системою відліку, в якій розташована точка, і швидкості  $\mathbf{v}_{\text{відн}}$  точки в рухомій системі відліку.

### Приклад

Рух точки на ободі колеса, що котиться без ковзання. Цей рух можна розглядати як результат додавання двох рухів: поступального із швидкістю  $\mathbf{v}_O$  осі колеса (це переносний рух) і обер-

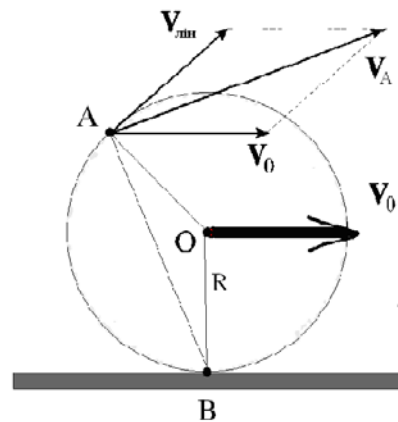
тального навколо цієї осі (це відносний рух) (рис.1.21). Прослизання в точці дотику  $B$   $|\mathbf{v}_O| = |\mathbf{v}_{\text{лін}}|$  відсутнє. Швидкість точки

$A$  в вершині (в найвищій точці) дорівнює  $2|\mathbf{v}_O|$ . З простих геометричних міркувань

виходить, що вектор повної швидкості  $\mathbf{v}_A$

довільної точки  $A$  на ободі колеса спрямований уздовж прямої, перпендикулярної хорді  $AB$  і проходить через верхню точку колеса, що котиться. Траєкторія руху точки  $A$  є відома крива – проста циклоїда. Таким чином, кочення колеса – це суперпозиція двох рухів: поступального із швидкістю осі  $\mathbf{v}_O$

і обертального з кутовою швидкістю  $\omega = \frac{v_O}{R}$ .



**Рис. 1.21.** Рух точки  $A$  на ободі колеса, що рівномірно котиться

2. Нехай тверде тіло здійснює плоский рух. Положення твердого тіла під час плоского руху однозначно визначає положення плоскої фігури  $\Phi$  в нерухомій площині  $P$ , що дає можливість звести вивчення плоского руху до вивчення руху цієї фігури [5]. Введемо дві системи відліку: нерухому систему і відповідно до неї систему координат  $Oxyz$ , і систему, що руха-

ється разом з тілом  $O'x'y'z'$ . Початок рухомої системи помістимо в довільну точку  $O'$  твердого тіла, а осі цієї системи виберемо так, щоб вони залишалися паралельними осям координат системи, що нерухома. Нехай  $\mathbf{r}_0$  – радіус-вектор, проведений з точки  $O$  початку нерухомої системи в точку  $O'$  – початок рухливої. В твердому тілі, що рухається, виберемо довільну точку  $A$  і проведемо до неї з точки  $O'$  радіус-вектор  $\mathbf{r}'$ , а радіус-вектор, проведений до цієї ж точки з точки  $O$  позначимо  $\mathbf{r}$  (рис. 1.22). Положення фігури  $\Phi$  визначене, якщо задані вектор  $\mathbf{r}_0$  і кут  $\varphi$  між вектором  $\mathbf{r}'$ , жорстко пов'язаним з фігурою і фіксованим напрямком  $O'x'$ . Рух твердого тіла

можна описати двома рівняннями:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$

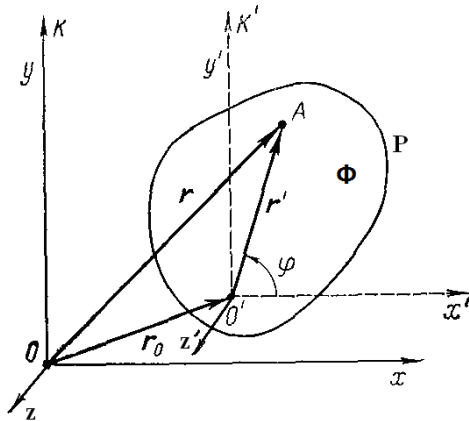


Рис. 1.22. До опису плоского руху твердого тіла

Нехай за час  $dt$  фігура обернулася на кут  $d\varphi$ . На такий же кут обернеться і будь-який інший відрізок, пов'язаний з фігурою. Отже, поворот на кут  $d\varphi$  не залежить від того, відносно якої точки цей поворот здійснюється, тобто не залежить від вибору точки  $O'$ . А це означає, що і кутова

швидкість  $\omega$  теж не залежить від вибору точки, і можна назвати  $\omega$  кутовою швидкістю твердого тіла як цілого.

Знайдемо лінійну швидкість довільної точки  $A$  тіла. Елементарне переміщення точки  $A$ ,  $d\mathbf{r}$ , може бути представлено у вигляді:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}', \quad (1.30)$$

де  $d\mathbf{r}_0$  – переміщення точки, а разом з нею і системи  $K'$ , а  $d\mathbf{r}'$  – переміщення точки  $A$  відносно системи  $K'$ , тобто відносно точки  $O'$ . Переміщення  $d\mathbf{r}'$  обумовлене обертанням тіла навколо нерухомої в  $K'$ -системі осі, що проходить через точку  $O'$ , і яка перпендикулярна до площини ру-



ху. Вектор кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$  спрямований уздовж осі обертання і також перпендикулярний площині руху. Згідно вище отриманому співвідношенню (1.19),  $d\mathbf{r}' = [d\phi \mathbf{r}']$ . Отже

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + [d\phi \mathbf{r}'].$$

Розділивши обидві частини на  $dt$ , отримаємо швидкість довільної точки А тіла:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']. \quad (1.31)$$

Отже, швидкість будь-якої точки А твердого тіла під час плоского руху складається із швидкості  $\mathbf{v}_0$  довільної точки  $O'$  цього тіла і швидкості  $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']$ , обумовленою обертанням тіла навколо осі, що проходить через точку  $O'$ . Швидкість  $\mathbf{v}_0$  – переносна швидкість,  $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']$  – відносна швидкість. Це швидкість точки А відносно  $K'$ -системи, що рухається поступально, і яка жорстко пов'язана з точкою  $O'$ . Іншими словами, плоский рух твердого тіла можна представити як сукупність (суперпозицію) двох основних видів руху: поступального разом з довільною точкою  $O'$  і обертального навколо осі, що проходить через точку  $O'$ . Водночас кутова швидкість  $\boldsymbol{\omega}$  перпендикулярна площині руху.

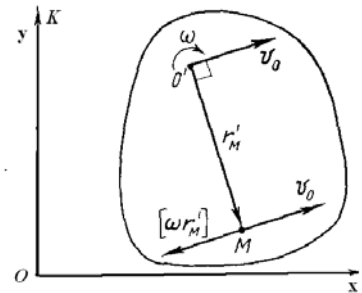
3. Розглянутий плоский рух (змішана комбінація поступального і обертального рухів) може бути зведений до чисто обертального руху. Справді, під час плоского руху швидкість  $\mathbf{v}_0$  довільної точки  $O'$  перпендикулярна вектору кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$ . Тому у будь-який момент часу завжди знайдеться така точка М, жорстко пов'язана з тілом, швидкість якої  $\mathbf{v} = 0$  в даний момент часу. Її положення визначається з умови:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']; \quad \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v}_0 = -[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_M]. \quad (1.32)$$

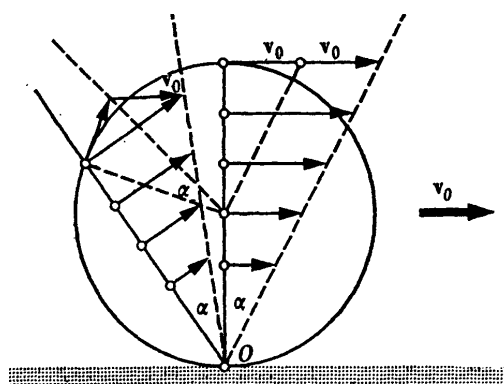
З цієї умови можна визначити радіус-вектор точки М,  $\mathbf{r}'_M$ . Цей вектор перпендикулярний векторам  $\boldsymbol{\omega}$  і  $\mathbf{v}_0$ , його напрямок відповідає векторному

добутку  $-\left[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0\right]$ , а модуль дорівнює  $r'_M = \frac{v_0}{\omega}$ . Точка М не обов'язково повинна належати тілу, в загальному випадку вона може знаходитися і поза тілом.

Точка М визначає положення осі, яка співпадає за напрямком з вектором  $\boldsymbol{\omega}$ . Рух твердого тіла в даний момент часу – це чисте обертання навколо цієї осі. Таку вісь називають миттєвою віссю обертання. Звідси виходить, що плоский рух твердого тіла у будь-який момент часу можна представити як чисте обертання навколо осі, що проходить через нерухому точку М – навколо так званої миттєвої осі обертання (рис. 1.23). Швидкості усіх точок твердого тіла, що лежать на цій осі обертання, однакові і дорівнюють нулю. Це означає, що в даний момент часу (для  $\mathbf{v}_0 = 0$ ) миттєвий розподіл швидкостей в твердому тілі такий же, як і під час обертання навколо нерухомої осі обертання, що проходить через точку М, і перпендикулярна до площини руху. Швидкість як поступального, так і обертального твердого тіла на миттєвій осі дорівнює нулю.



**Рис. 1.23. Положення миттєвої осі обертання під час плоского руху**



**Рис. 1.24. Переміщення миттєвої осі обертання під час рівномірного руху колеса**

### Приклад [1]

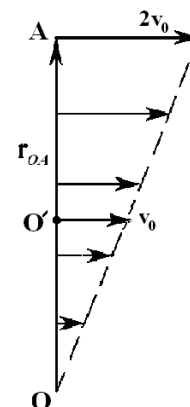
Розглянемо колесо, що котиться по прямій лінії. Його миттєвою віссю обертання є пряма, що проходить через точку О (точку дотику). Ця вісь змінює своє положення відносно Землі – вона переміщується в точку, віддалену від початкової на величину  $v_0 t$ , тобто переміщу-

ється разом з колесом і в кожний момент часу співпадає з лінією торкання

колеса і площини (рис. 1.24). Якщо  $O$  і  $A$  – дві довільні точки колеса, а  $r_{OA}$  – відстань між ними, то ця відстань залишається незмінною, а тому  $r_{OA}^2 = (r_A - r_O)^2 = \text{const}$ . Диференціюючи його за часом, отримаємо:

$$r_{OA}(v_A - v_O) = 0. \quad (1.33)$$

Якщо швидкість точки  $O$   $v_O = 0$  в деякий момент часу, то  $r_{OA} v_A = 0$  для будь-якого розташування точки  $A$ . Звідси виходить, що швидкість точки  $A$ ,  $v_A$ , перпендикулярна  $r_{OA}$ , тобто швидкість точки  $A$  спрямована по дотичній до кола з центом в точці  $O$ , і модуль швидкості  $v_A$  в цей момент пропорційний  $r_{OA}$ . Отже, миттєвий розподіл швидкостей в твердому тілі в даний момент часу буде таким, як під час обертання навколо нерухомої осі, що проходить через точку  $O$  (рис. 1.25).



**Рис.1.25. До виведення (1.33)**

Миттєва вісь обертання проходить через точку  $O$ . Слово «миттєва» означає, що це поняття служить для опису миттєвого розподілу швидкостей в заданий момент часу. Миттєва вісь – уявна вісь, в різні моменти часу вона проходить через різні точки колеса, переміщується як в тілі, так і в просторі. З часом до дотику з площиною придуть інші точки колеса, тобто точка дотику переміщатиметься по площині у бік руху колеса. Це означає, що миттєва вісь переміщується як відносно колеса, так і відносно площини кочення (рис. 1.24).

Щоб визначити положення миттєвої осі обертання, необхідно знати швидкості будь-яких двох точок тіла, чи положення тіла в будь-яких 2-ох моментах часу. Якщо відомі напрямки векторів швидкості  $v_A$ ,  $v_B$  двох точок  $A$  і  $B$  тіла, що здійснює плоский рух, досить визначити точку перетину перпендикулярних до векторів  $v_A$ ,  $v_B$  прямих, що лежать в площині руху [13, 6]. Через точку їх перетину  $M$  і проходить миттєва вісь обертання (рис.

1.26). Для циліндра, затиснутого між двома паралельними рейками, які рухаються в один бік з різними швидкостями  $v_1$  і  $v_2$ , миттєва вісь обертання

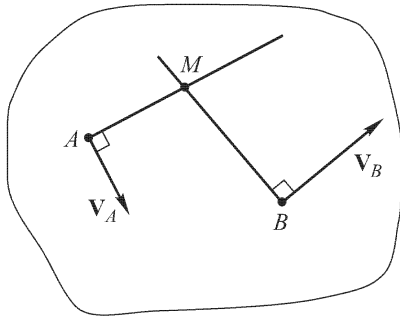


Рис. 1.26. До визначення положення миттєвої осі обертання

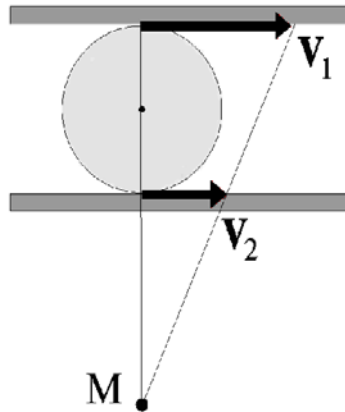


Рис. 1.27. Положення миттєвої осі обертання циліндра, затиснутого між двома паралельними рейками

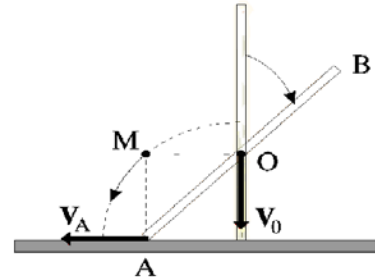


Рис. 1.28. Миттєва вісь обертання стержня, що падає з вертикального положення

ня (точка M) знаходиться поза цим циліндром (рис. 1.27). В стержні, що спирається одним із своїх кінців на гладку горизонтальну площину і який починає падати з вертикального положення так, що його центр залишається на одній і тій же вертикалі (точка O), миттєва вісь обертання (точка M) переміщується по дузі кола радіусу  $l/2$ , де  $l$  – його довжина (рис. 1.28).

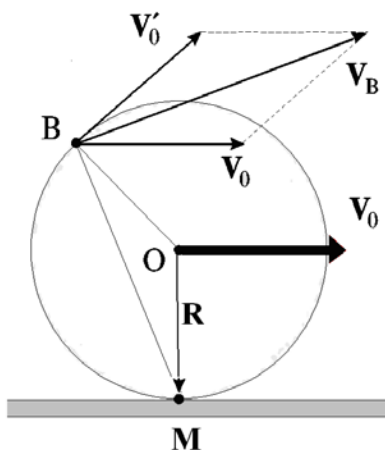


Рис. 1.29. До визначення швидкості будь-якої точки тіла під час плоского руху

### Приклад [6]

Знаючи кутову швидкість  $\omega$  і положення миттєвої осі обертання, можна визначити швидкість будь-якої точки тіла під час його плоского руху. Нехай колесо котиться без ковзання по площині із швидкістю  $v_0$ . Швидкість точки B на рис. 1.29

$$v_B = \omega \cdot MB = \frac{v_0}{R} \cdot MB.$$

Вектор  $v_B$  перпендикулярний відрізку MB, а через точку M проходить миттєва вісь обертання. Вектор швидкості точки

В можна розкласти на векторну суму двох швидкостей:  $\mathbf{v}_0$  – швидкість поступального руху і  $\mathbf{v}'_0$  – швидкість обертального руху навколо цієї осі, причому  $|\mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}'_0|$ . Миттєва вісь проходить через точку М, вона паралельна осі, яка проходить через точку О.

4. Знайдемо прискорення точок під час плоского руху. Обчисливши похідну за часом від швидкості точки (1.31), отримаємо:

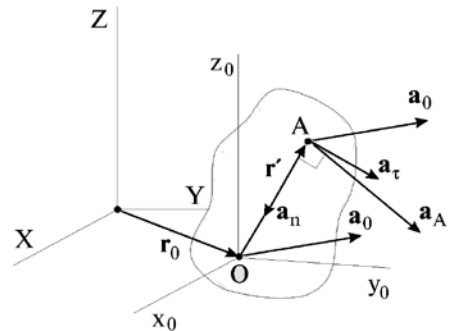
$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r}' \right] + \left[ \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right] = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \quad (1.34)$$

Це прискорення складається з трьох величин: прискорення  $\mathbf{a}_0$  точки О, що вважає початком, тангенціального прискорення

$\mathbf{a}_\tau = \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r}' \right]$  і нормального

$\mathbf{a}_n = \left[ \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right] = \left[ \boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] \right] = -\omega^2 \mathbf{r}'$ . Таким чином,

прискорення будь-якої точки А тіла під час плоского руху складається з векторної суми прискорення точки початку системи відліку, і прискорення, що виникло внаслідок обертання навколо цієї точки (рис. 1.30). Звідси, зокрема, витікає, що прискорення будь-якої точки колеса, що котиться без проковзування по площині з постійною швидкістю, спрямоване до центру колеса і дорівнює  $v_0^2/r$ , де  $r$  – відстань точки до осі колеса.



**Рис. 1.30.** Лінійне прискорення точки А під час плоского руху

## 1.6 Перетворення координат

Відлік положення точок відносно тіла відліку описується в механіці за допомогою системи координат. Системи координат вводять одиниці дов-

жини, правила відліку відстаней, прямих кутів і так далі. Систему відліку нерухомо пов'язують з тілом відліку. Тіло відліку, система координат, годинник для реєстрації положення точки в різні моменти часу – усе це разом узятє складає систему відліку.

Вибір системи координат диктується міркуваннями зручності і простоти опису руху. В разі тривимірного руху найчастіше використовують прямокутну декартову, циліндричну і сферичну системи координат [1,2,6]. Декартова система координат є основною, коли розглядається рух точки.

В циліндричній системі координат положення рухомої матеріальної точки задають її радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , проведеним з початку системи координат. Положення точки в просторі визначають такі три числа:

відстань  $\rho$  точки від початку координат до проекції радіус-вектора  $\mathbf{r}$  на площину  $Oxy$ ;

кут  $\varphi$  між позитивним напрямком осі  $Ox$  і проекцією  $\rho$  радіус-вектора на площину  $Oxy$ ;

координата  $z$ , як проекція радіус-вектора  $\mathbf{r}$  на вісь  $Oz$ .

Зображення циліндричних координат показане на рис. 1.31. Циліндричні координати пов'язані з декартовими таким чином:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi; \\ z = z. \end{cases} \quad (1.35)$$

Для опису руху в сферичній системі координат використовують такі величини:

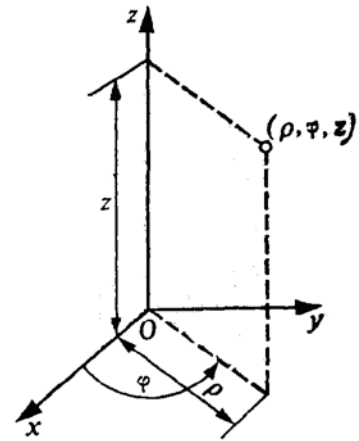
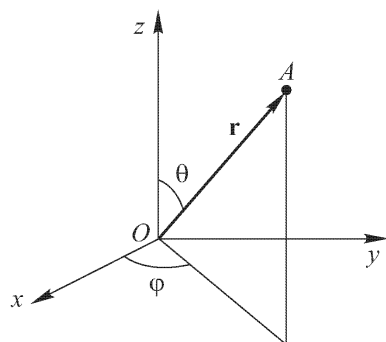


Рис. 1.31. Циліндрична система координат

модуль радіус-вектора точки  $\mathbf{r}$  як відстань її від початку координат до даної точки;



**Рис. 1.32. Сферична система координат**

кут  $\theta$ , відлічуваний від позитивного напрямку осі  $Oz$  до радіус-вектора точки  $\mathbf{r}$ ;

кут  $\varphi$  між позитивним напрямком осі  $Ox$  і проекцією радіус-вектора  $\mathbf{r}$  на площину  $Oxy$ .

Зображення сферичних координат показане на рис. 1.32. Сферичні координати пов'язані з декартовими такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi; \\ y = r \sin \theta \sin \varphi; \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (1.36)$$

Формули, які пов'язують координати матеріальної точки в одній системі координат з відповідними числами в іншій системі координат, називають формулами перетворення координат або просто перетвореннями координат. Ці перетворення координат виконуються в одній системі відліку (тривимірній декартовій) і є чисто геометричними операціями. Вони не пов'язані з рухом тіла відліку, і в сукупності описують одну і ту ж систему відліку в різних змінних. Для описів руху необхідно ввести вимір часу синхронізованим годинником. Проте перетворення координат в одній і тій же системі відліку не зачіпають час.

Як відомо з розглянутого вище матеріальні тіла, з якими пов'язані різні системи відліку, можуть рухатись один відносно одного. В кожній з систем відліку введені свої системи координат, час в різних точках систем координат вимірюють нерухомими в цих точках і синхронізованими між собою годинниками. Виникає питання: як пов'язані координати і час різних систем відліку, якщо ці системи знаходяться у відносному русі? Це вже не геометрична, а фізична задача. Вона стає геометричною, коли відносна шви-

дкість різних систем відліку дорівнює нулю, відмінність їх зникає і їх можна розглядати як одну.

### **1.7. Інерціальні системи відліку. І закон Ньютона.**

#### **Принцип відносності**

Найпростіший рух твердого тіла – поступальний рівномірний прямолінійний рух. Отже, найпростішим відносним рухом є поступальний рівномірний прямолінійний. Коли такий рух здійснюється? Коли він називається або може бути названий вільним. Вільний рух здійснюється вільним тілом. Вільним назовемо тіло, настільки віддалене від усіх інших тіл, що їх дія на рух цього тіла є малою, і нею можна знехтувати [14]. Уявлення про вільне тіло пов'язане із загальною властивістю усіх взаємодій: по мірі збільшення відстані між тілами їх взаємодія слабшає, наближається до нуля, і немає експериментальних фактів, що суперечать цьому. Тому всі досить віддалені одне від одного тіла рухаються практично незалежно один від одного. З таким тілом можна зв'язати систему відліку. В таких системах відліку вільне тіло, на яке не діють інші тіла, рухатиметься прямолінійно і рівномірно або за інерцією. Ствердна відповідь на це питання міститься в І законі Ньютона або в законі інерції: «Будь-яке тіло продовжує утримуватися у своєму стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, доки прикладені до нього сили не примушують його змінити цей стан». Існування таких систем підтверджується дослідом, такі системи відліку називають **інерціальними системами відліку (ICB)**. В першому законі стверджується, що спокій і рівномірний прямолінійний рух – суть один і той же механічний стан тіла. Більше того, класична механіка постулює, що існують такі системи відліку (ICB), в яких всі вільні тіла або зберігають стан спокою, або рухаються рівномірно і прямолінійно. Звідси витікає, що інер-



ціальність систем відліку можна встановити лише в результаті вивчення ходу фізичних процесів в цих системах відліку.

### **Приклад ІСВ**

В Сонячній системі це геліоцентрична система, пов'язана з Сонцем і нерухомими зірками. Початок координат цієї системи знаходиться в центрі Сонця, три перпендикулярні осі спрямовані на три зірки, положення яких в силу їх величезної віддаленості не змінюється з часом.

Чим ще характерні такі (ІСВ) системи відліку? В ІСВ постулюють виконання принципу відносності Галілея: в усіх системах відліку, що рухаються рівномірно і прямолінійно відносно системи нерухомих зірок, і, отже, один відносно одного, всі механічні явища протікають однаково, поля тяжіння нехтовно малі. Отже, такі системи є інерціальними, оскільки в них справедливий закон інерції Ньютона: тіло, віддалене досить далеко від інших тіл, рухається відносно систем відліку рівномірно і прямолінійно. Всі ІСВ фізично еквівалентні, механічні закони формулюються однаково. Сформульований принцип відносності є постулатом, що виходить за межі експериментальної перевірки [15].

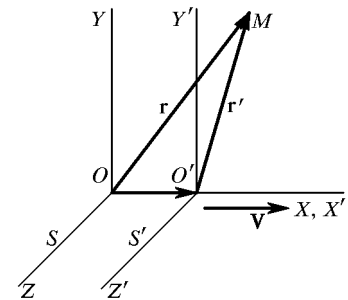
Отже, принцип відносності ґрунтується на припущенні, що існує безліч систем відліку з геометрією Евкліда, існує єдиний час і синхронізовані годинники, які його вимірюють. Просторово-часові співвідношення всіх ІСВ однакові і не відмітні один від одного. Принцип відносності констатує подібність характеру ходів механічних процесів в ІСВ, і є фізичним твердженням. Системи відліку, що рухаються відносно ІСВ з прискоренням – неінерціальні системи.

## **1.8 Перетворення Галілея**

Як встановлено вище, існує безліч ІСВ, що рухаються відносно одна

одної прямолінійно і рівномірно. Як пов'язані між собою координати і час подій фізичних явищ (координати точки) з переходом з однієї ІСВ до іншої? Розглянемо дві рівноправні ІСВ  $K$  і  $K'$  з відповідними декартовими системами координат. Суть таких перетворень полягає у відповіді на питання: нехай два спостерігачі, кожен із своєї ІСВ описує рух матеріальної точки. Чи зможе кожен із спостерігачів за своїми вимірами розрахувати виміри іншого спостерігача? Так, якщо відомі закони перетворення величин з переходом з однієї системи в іншу.

Нехай система  $K$  – умовно нерухома, система  $K'$  рухається в додатному напрямку осі  $Ox$  з постійною швидкістю  $V \ll c$  швидкості світла. Вважатимемо, що в початковий момент часу  $t=0$  початки обох систем співпадають. Нехай точка  $M$  є нерухомою в рухомій системі відліку



**Рис. 1.33.** До виведення перетворення Галілея

$K'$ . Положення точки  $M$ , що рухається разом з системою відліку в системі  $K$  характеризуватимемо радіус-вектором  $\mathbf{r}$ . Початок координат системи відліку  $K'$  за час руху  $t$  переміститься на відстань  $OO'$ , в цьому разі вектор  $OO' = \mathbf{V}t$  (рис. 1.33). В системі  $K'$  положення точки  $M$  задамо радіус-вектором  $\mathbf{r}'$ , а годинник цієї системи показуватиме час  $t = t'$ , оскільки в класичній нерелятивістській механіці постулюється абсолютний час: плин часу не залежить від матеріальних об'єктів і вибору системи відліку. Це означає, що, якщо деякі дві події сталися одночасно в системі  $K'$ , то ці події одночасні і відносно системи  $K$ . Поняття одночасності в механіці Ньютона є абсолютним. Тому зв'язок між векторами  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{V}t$  призводить до співвідношення:

$$\mathbf{r}' + \mathbf{V}t = \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \quad (1.37)$$

або в проекції на координатні осі отримуємо:

$$\begin{aligned}
x' &= x - Vt; \\
y' &= y; \\
z' &= z; \\
t' &= t.
\end{aligned}
\tag{1.38}$$

Зворотні перетворення, якщо нерухомої системою вважати систему  $K'$ , мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
x &= x' + Vt; \\
y &= y'; \\
z &= z'; \\
t &= t'.
\end{aligned}
\tag{1.39}$$

Отримані співвідношення називають перетвореннями Галілея. Таким чином, перетворення Галілея уможливають зв'язати між собою координати і час подій фізичних явищ з переходом з однієї ІСВ до іншої, яка рухається відносно умовно нерухомої із швидкістю  $V \ll c$  швидкості світла.

Перетворення Галілея змінюють числові значення різних фізичних і геометричних величин. Якщо ж величина не змінює свого числового значення з переходом в іншу систему відліку, то це означає, що вона має об'єктивне значення, не залежне від вибору тієї чи іншої системи відліку. Такі величини відображають властивості самих явищ і предметів, що вивчаються, а не відношення цих предметів до системи відліку, в якій вони розглядаються. Величини, числове значення яких не змінюється з переходом в інші системи відліку, називають інваріантами перетворень. Вони мають певне значення у фізичних теоріях.

Які величини є інваріантами відносно розглянутих перетворень Галілея? Виміряємо довжину стержня в кожній з систем відліку. Щоб ці виміри зробити, необхідно зафіксувати координати його кінців в кожній з них. В системі, в якій стержень нерухомий, це можна зробити в різні моменти часу; в рухомій системі – обов'язково в один і той же момент часу по годин-

нику цієї системи. В системі  $K'$  стержень нерухомий і має довжину:

$$d' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2}.$$

В системі  $K$  стержень рухається, і його довжина буде дорівнювати:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

де координати зафіксовані в деякий момент часу  $t_0$  по годиннику системи  $K$ . Використовуючи перетворення Галілея, отримуємо, що  $d = d'$  (переко-  
нати самостійно!), тобто довжина стержня в обох системах співпадає.

Інваріантний і інтервал часу:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Це є наслідком формули перетворення часу  $t = t'$ , тобто події одночасні в різних ІСВ, одночасність двох подій носить абсолютний характер і не залежить від системи відліку.

Нехай точка  $M$  рухається в системі  $K'$ , тоді її координати в обох систе-  
мах є функцією часу:

$$\begin{aligned} x &= x(t); & y &= y(t); & z &= z(t); \\ x' &= x'(t'); & y &= y'(t'); & z' &= z'(t'). \end{aligned}$$

Обчисливши похідну за часом від перетворення координат, з урахуванням того, що  $dt = dt'$ , легко отримати формулу перетворення швидкостей  $v$  і  $v'_x$  під час руху уздовж осей  $Ox$  і  $O'x'$ :

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - V; \\ v'_y &= v_y; & v'_z &= v_z. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Отримані співвідношення (1.40) називають формулами перетворення шви-  
дкостей Галілея. Вони пов'язують швидкості точки в різних системах від-  
ліку, одна з яких рухається відносно іншої уздовж осі  $x$  із швидкістю  $V$ .  
Диференціюючи ще раз за часом, отримуємо:  $a'_x = a_x$ ;  $a'_y = a_y$ ;  $a'_z = a_z$ .  
Отже, прискорення точки інваріантне відносно перетворення Галілея.

## 1.9 Принципи класичної механіки та її обмеження

В основі механіки Ньютона лежать уявлення про простір і час, пов'язані із законами Ньютона. Сформулюємо ці уявлення [4, 7, 14, 27].

1. Простір підпорядковується геометрії Евкліда, має три виміри і всі системи відліку є Евклідовими.

2. Час існує незалежно від простору, тобто існує абсолютний час. Разом з тим час пов'язаний з простором законами руху.

3. Розміри твердих тіл однакові в різних системах відліку. Відстань між двома точками визначається відомою формулою

$$d_{1,2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ця величина завжди позитивна, є інваріантом, тобто однакова в усіх системах відліку.

4. Діє закон інерції Галилея-Ньютона, згідно з яким тіло, яке не зазнає дії з боку інших тіл, рухається рівномірно і прямолінійно. Підтверджується існування інерціальних систем відліку, в яких діє принцип відносності Галілея і I закон Ньютона: в усіх системах відліку, що рухаються рівномірно і прямолінійно відносно одна одної усі механічні явища за однакових початкових умов відбуваються однаково і в них виконується закон інерції Ньютона.

5. У таких системах відліку виконуються перетворення Галілея, що виражають просторово-часовий зв'язок будь-яких подій в різних інерціальних системах. Існує безліч систем відліку з геометрією Евкліда, в яких усі механічні явища відбуваються однаково.

6. Виконується принцип дальності: взаємодії тіл поширюються миттєво, тобто з нескінченно великою швидкістю. Наприклад, гравітаційна сила, що діє на матеріальну точку 1, згідно із законом всесвітнього тяжіння,

залежить тільки від положення матеріальної точки 2.

Ці уявлення відповідали усій сукупності експериментальних даних, що були на той час. Успішний розвиток механіки також є підтвердженням цих уявлень.

У ході розвитку інших розділів фізики (оптики, електродинаміки) виникло питання: чи поширюється принцип відносності Галілея на інші явища? Досягнення фізики 19-20 століть показали, що уявлення про абсолютний простір, абсолютний час, миттєвість поширення взаємодії є наближеними, апроксимацією реальних властивостей простору-часу, погрішність якої лежать за межами можливостей експериментів епохи Ньютона.

Одно з таких явищ – поширення світла, яке протікає по різному в різних системах відліку. Низкою експериментів, зокрема, дослідями Майкельсона-Морлі [4, 6, 15], було показано, що швидкість світла не залежить ні від швидкості джерела, ні від швидкості приймача (детектора) світла. Потім Максвелл узагальнив теоретично результати багатьох експериментів (А.-М. Ампера, М. Фарадея, Ш. Кулона) і запропонував рівняння, що описують рух електромагнітного випромінювання, з яких виходило існування електромагнітних хвиль і швидкість їх поширення. Пізніше ці хвилі були відкриті експериментально. Виявилось, що їх швидкість збігається з багаторазово до цього виміряною і добре відомою швидкістю світла. Проте, ці рівняння виявилися не інваріантними перетворенням Галілея: швидкість світла повинна була змінюватися при переході з однієї ІСВ в іншу. Були і інші експерименти, що виявили протиріччя експериментальних даних і теоретичних пояснень у рамках ньютонівських уявлень [17, 26]. Рішення цієї проблеми було дано в теорії відносності Ейнштейна. Розглянемо частину цієї теорії, так званої **спеціальної теорії відносності (СТВ)**. Термін «спеціальна» підкреслює ті

обставини, що ця теорія розглядає явища в інерціальних системах відліку.

## **1.10 Принцип відносності Ейнштейна.**

### **Постулати СТВ**

Виходячи з численних експериментів, проведених в 20 столітті, пришли до висновку про скінченну величину швидкості світла і взаємодій. Гранична швидкість частинок в прискорювачах, в космічних променях, співпадає із швидкістю світла у вакуумі.

На сьогодні неодноразово виміряна швидкість світла дорівнює  $c = 299792458 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

У сучасній фізиці фундаментальну взаємодію тлумачать як обмін відповідними частинками. Наприклад, сильна взаємодія між кварками всередині нуклонів (протонів і нейтронів) виникає в результаті обміну глюонами – переносниками цих взаємодій. Так звані слабкі взаємодії – наслідок обміну векторними бозонами. Якщо взаємодію тлумачити як обмін частинками, то з факту існування граничної швидкості світла частинок виникає обмеження і на швидкість поширення взаємодії. Таким чином, цілком впевнено можна стверджувати, що швидкість поширення фундаментальної взаємодії або швидкість сигналу не перевищує швидкості світла  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Оскільки інерціальні системи відліку повинні бути пов'язані з якими-небудь фізичними тілами або частинками, то ясно, що жодна з систем не може рухатися відносно будь-якої іншої зі швидкістю, що перевищує межу швидкості світла  $c$ .

А. Ейнштейном була створена СТВ, що привело до перегляду початкових положень класичної фізики, передусім уявлень про властивості простору і часу. Як вихідні позиції СТВ Ейнштейн прийняв два постулати

або принципи, на підтвердження яких говорить увесь експериментальний матеріал [1, 4, 6, 26]:

принцип відносності;

незалежність швидкості світла від швидкості джерела.

Перший постулат – це узагальнення принципу відносності Галілея на будь-які фізичні процеси: *усі фізичні явища* відбуваються однаковою чином в усіх інерціальних системах відліку за однакових початкових умов; усі закони природи і рівняння, що їх описують, інваріантні, тобто не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Іншими словами, усі інерціальні системи відліку еквівалентні (не відрізняються) за своїми фізичними властивостями; ніяким дослідом не можна в принципі виділити жодну з них як переважну.

Другий постулат стверджує, що швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості джерела і швидкості спостерігача, однакова по всіх напрямках і в усіх інерціальних системах відліку.

Отже, швидкість світла займає особливе положення в природі, вона не змінюється при переході від однієї ІСВ до іншої, є інваріантом.

Тепер звернемося до питання про просторово-часові співвідношення між цими подіями в різних ІСВ. У ньютонівській механіці як відомо, просторові співвідношення (тобто координати події) між різними подіями залежать від системи відліку і пов'язані перетвореннями Галілея, а часові співвідношення не залежать від системи відліку, тобто час вважають абсолютним часом, що однаково протікає в усіх ІСВ. Насправді одночасність (і перебіг часу) також є поняттям відносним. Час набуває сенс тоді, коли вказано, до якої системи відліку це поняття відноситься. Таким чином, події одночасні в одній системі відліку не є одночасними в іншій системі відліку, тобто одночасність також є поняттям відносним, тобто час в різних системах відліку плине неоднаково.



## 1.11 Перетворення Лоренца

Лоренц вивів рівняння, тобто перетворення координат і часу при переході від однієї ІСВ до іншої, використовуючи принцип відносності, постулати Ейнштейна, а також однорідність і ізотропність простору і часу.

Якщо що-небудь відбувається в деякій точці простору в який-небудь момент часу, то говорять, що **має місце подія**. Розглянемо поняття інтервалу між подіями. Нехай в довільній точці 1 з координатами  $x_1, y_1, z_1$  у момент часу  $t_1$  відбувається яка-небудь подія, а в точці 2 з координатами  $x_2, y_2, z_2$  у момент часу  $t_2$  – інша подія. Інтервалом між подіями визначимо величину  $\Delta S$  наступним чином [4, 6, 15]:

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (1.41)$$

де  $\Delta t = t_2 - t_1$ ;  $\Delta x = x_2 - x_1$ ;  $\Delta y = y_2 - y_1$ ;  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Тут перший доданок – часова частина інтервалу, інші – просторова частина інтервалу. Це аналог відстані між точками в геометрії Евкліда. Для подій, що відбуваються в нескінченно близьких точках і в нескінченно близькі моменти часу квадрат інтервалу визначають аналогічним чином:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.42)$$

Найважливішою властивістю інтервалу, яка постулюється, є його інваріантність при переході з однієї ІСВ в іншу:  $S^2 = S'^2$ ;  $dS^2 = dS'^2$ .

Знайдемо, яка група перетворень простору-часу задовольняє інваріантності квадрата інтервалу між подіями. У зв'язку з цим розглянемо дві системи відліку: систему К, яку вважатимемо такою, що покоїться, і систему К', що рухається з постійною швидкістю  $\mathbf{V}$  у напрямі осі Ох. З кожною з систем відліку пов'язана певна кількість синхронізованих годинників, які фіксують час настання подій в обох системах відліку:  $t$  і  $t'$ . Нехай на початку координат двох систем, коли вони співпадали, у момент

часу  $t = t' = 0$  стався спалах світла. З принципу відносності і постулату про постійність швидкості світла виходить, що в обох системах відліку фронт світлової хвилі – сферична поверхня. Рівняння цієї сферичної поверхні в системах  $K$  і  $K'$  мають вигляд відповідно:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 &= 0; \\x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= 0.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Перетворення простору-часу повинні відповідати цим рівнянням. Застосуємо перетворення Галілея підстановкою

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t.$$

Ця підстановка приводить до наступного співвідношення:

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xVt + (Vt)^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Очевидно, це не узгоджується з рівнянням (1.43)

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Отже, перетворення Галілея не задовольняє цим вимогам. Якщо вірний постулат постійності швидкості світла, то повинне існувати якесь перетворення, що переходить в перетворення Галілея при граничному переході  $V/c \rightarrow 0$  і що перетворює  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$  в  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ . Нове перетворення повинне просто переводити  $y' \rightarrow y$ ,  $z' \rightarrow z$ , тому що в рівнянні перетворюються  $y'^2 \rightarrow y^2$ ,  $z'^2 \rightarrow z^2$  без додаткових множників. Перетворення має бути лінійним відносно  $x$  і  $t$ , оскільки ми маємо справу з однорідним і ізотропним простором і часом.

Спробуємо запропонувати і перевірити перетворення виду:

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t + bx,$$

де  $b$  – деяка стала, значення якої слід визначити з подальших перетворень.

Рівняння  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$  в цьому випадку набуває вигляд:

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t + bx)^2.$$

Розкриваючи дужки, отримуємо:

$$x^2 - 2Vtx + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2bxt + c^2b^2x^2.$$

Якщо прийняти, що  $b = -\frac{V}{c^2}$ , і тоді  $t' = t - \frac{V}{c^2}x$ , то початкове рівняння

$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$  можна переписати в такому вигляді після піднесення до квадрату і приведення подібних членів:

$$x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Масштабний множник  $\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$  можна виключити, якщо перетворення

узяти у вигляді:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

маючи на увазі, що при такій підстановці перетворене співвідношення буде ближче до того кінцевого результату, який необхідно отримати, а саме:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Після підстановки, піднесення до квадрату, перетворень і приведення подібних членів отримуємо:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2.$$

Отримані таким чином перетворення координат і часу при переході від однієї ІСВ до іншої мають вигляд:

$$x' = \Gamma(x - Vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad (1.44)$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$  – масштабний множник або чинник Лоренца. При

використанні перетворень Лоренца інтервал між подіями, також, як і рівняння  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$  інваріантне відносно цих перетворень.

Зворотні перетворення можна отримати з прямих, замінюючи швидкість  $V$  на  $(-V)$ , а штриховані змінні на не штриховані і навпаки:

$$x = \Gamma(x' + Vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \quad (1.45)$$

Очевидно, що, якщо  $V \ll c$ , то  $\Gamma \approx 1$ , і перетворення Лоренца переходять в перетворення Галілея (1.38):

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt; \\ y' &= y; \\ z' &= z; \\ t' &= t. \end{aligned}$$

## 1.12 Наслідки перетворень Лоренца

### 1. Відносність одночасності

Дві події, що сталися в різних точках  $x_1$ ,  $x_2$  системи відліку називають одночасними, якщо вони відбуваються в один і той же момент часу за годинником цієї системи відліку. У кожній з точок момент події фіксують годинниками, що знаходяться у відповідній точці. Вважатимемо, що події сталися одночасно в нерухомій системі відліку  $K$  у момент часу  $t_0$  за годинником цієї системи відліку.

У системі  $K'$ , що рухається, ці події відбуваються в точках  $x'_1$ ,  $x'_2$  за годинником цієї системи відліку в моменти часу  $t'_1$ ,  $t'_2$ , коли в кожній з

точок сталася ця подія. Зв'язок між  $x'_1$ ,  $x'_2$  і  $x_1$ ,  $x_2$  дає перетворення Лоренца:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \Gamma(x_1 - Vt_0); & x'_2 &= \Gamma(x_2 - Vt_0); \\t'_1 &= \Gamma\left(t_0 - \frac{V}{c^2}x_1\right); & t'_2 &= \Gamma\left(t_0 - \frac{V}{c^2}x_2\right).\end{aligned}$$

Координати  $y$ ,  $z$  в обох системах дорівнюють нулю. З останнього співвідношення виходить, що в системі відліку  $K'$ , що рухається, ці події відбуваються не одночасно ( $t'_1 \neq t'_2$ ), вони розділені інтервалом часу

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \Gamma\left[\frac{V}{c^2}(x_1 - x_2)\right].$$

Таким чином, події, одночасні в одній системі відліку не є одночасними в іншій системі відліку. Видно також, що послідовність одних і тих же подій в різних системах відліку різна.

## 2. Довжина рухомого об'єкта

Система відліку, в якій тіло знаходиться в стані спокою, називають **власною** для цього тіла. Довжиною рухомого стержня називають відстань між точками в нерухомій для стержня системі відліку, з якими співпадають початок і кінець рухомого стержня в певний момент часу за годинником нерухомої системи відліку. Таким чином, кінці стержня, що рухається, при вимірі його довжини засікають одночасно в нерухомій для цього стержня системі відліку.

Нехай стержень довжини  $l$  нерухомий в штриховій системі відліку  $K'$  і розташований уздовж осі  $x'$ . Координати його кінців в цій системі будуть  $x'_1$ ,  $x'_2$ , при цьому  $x'_2 - x'_1 = l$ . Отже,  $l = x'_2 - x'_1$  – **власна довжина** стержня в системі  $K'$ , в якій стержень є нерухомим. Відмітимо тепер положення кінців стержня, що рухається зі швидкістю  $V$  разом з системою  $K'$ , пов'язаною із стержнем, в системі  $K$  у момент часу  $t_0$ . Вимога

одночасності цієї події в системі К є обов'язковою [4]. Виходячи з формул перетворення Лоренца, в системі К, відносно якої система К' рухається зі швидкістю V, ці координати у момент часу  $t_0$  за годинником системи К даються співвідношеннями:

$$x'_1 = \Gamma(x_1 - Vt_0); \quad x'_2 = \Gamma(x_2 - Vt_0).$$

Оскільки  $l = x'_2 - x'_1$ ,

$$l = x'_2 - x'_1 = \Gamma(x_2 - x_1) = \Gamma l'.$$

Звідки отримуємо, що

$$l' = \frac{l}{\Gamma}, \quad (1.46)$$

де  $l' = x_2 - x_1$  у момент часу  $t_0$  в К- системі – це довжина предмета, що рухається відносно К:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.47)$$

Довжина рухомого стержня, що спостерігається в нерухомій системі відліку і розташованого у напрямі руху, менше довжини стержня, що покоїться. Поперечні розміри тіла, що рухається, не змінюються.

Найбільша довжина предмета в тій системі відліку, де тіло нерухоме. Що означає скорочення розміру? Реального скорочення довжини стержня не відбувається, оскільки всі ІСВ – рівноправні, не виникають напруження і деформації, що ведуть до зміни лінійних розмірів тіл. Укорочення відбувається виключно в силу різних способів виміру довжини в різних системах відліку.

### 3. Хід рухомого годинника. Власний час

Нехай з системою відліку К' жорстко пов'язаний закріплений в ній годинник в деякій точці  $(x'_0, y'_0, z'_0)$ . Нехай в цій точці послідовно сталися дві події в моменти часу  $t'_1, t'_2$ . Проміжок часу, відлічений по годиннику

системи  $K'$  між цими подіями, дорівнює  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Визначимо проміжок часу між даними подіями в системі відліку  $K$ . У цій системі ці події відбуваються в різних точках в моменти часу  $t_1, t_2$ . Інтервал часу між цими подіями  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Згідно з перетвореннями Лоренца

$$t_1 = \Gamma \left( t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_0 \right); \quad t_2 = \Gamma \left( t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_0 \right).$$

Звідси виходить інтервал часу  $\Delta t$  в системі відліку  $K$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Gamma(t'_2 - t'_1) = \Gamma \Delta t'.$$

Таким чином, інтервал часу між подіями, виміряними рухомим годинником, дорівнює:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\Gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (1.48)$$

і цей інтервал менший, ніж інтервал  $\Delta t$  між тими ж подіями, виміряними нерухомим годинником. Це означає, що хід рухомого годинника сповільнюється відносно нерухомої системи.

Введемо поняття **власного часу** тіла. Нехай тіло рухається рівномірно і прямолінійно відносно системи відліку  $K$ . З рухомим тілом можна зв'язати систему відліку, в цій системі тіло нерухоме, це власна система відліку для цього тіла. Час, відлічуваний нерухомими годинами в цій системі, називають власним часом цього тіла. Такий годинник відлічує власний час тіла в точці, де тіло знаходиться. У такому разі співвідношення (1.48) вказує на те, що проміжок власного часу тіла між подіями, що сталися з тілом, завжди менше проміжку часу в системі, відносно якої тіло рухається. При цьому власний проміжок часу відлічують одними годинами, а проміжок часу в системі, відносно якої тіло рухається – іншими, принаймні, двома нерухомими (розташованими в двох різних точках  $K$ - системи). Тому не можна інтерпретувати результат так, що

рухомий годинник йде повільніше від нерухомих. Годинники в усіх ІСВ йдуть однаково. Різним є відлік проміжків часу між подіями. Це природно, оскільки годинники, синхронізовані в одній ІСВ, не синхронізовані в іншій ІСВ [4]. Для нескінченно малого інтервалу часу маємо:

$$dt' = d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad (1.49)$$

де  $d\tau$  – диференціал власного часу рухомої точки;  $dt$  – диференціал часу тієї ІСВ, в якій ця точка має в даний момент швидкість  $v = v(t)$ , миттєву швидкість точки, а не системи відліку, де  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ;  $\beta = \frac{v(t)}{c}$  на відміну

від  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ , де  $V$  – швидкість системи відліку, а не точки, що

рухається. Якщо тіло рухається довільним чином, за малі проміжки часу його рух можна вважати рівномірним і прямолінійним. Тоді, якщо за годинником системи відліку  $K'$  інтервал часу склав  $dt$ , то за годинником системи відліку  $K$  –  $dt$ , а зв'язок між ними дається співвідношенням

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v(t)}{c}. \quad (1.50)$$

Важливо, що  $d\tau$  – зміна показань одного і того ж рухомого з точкою годинника в  $K'$ - системі, а  $dt$  – різниця показань різних годинників нерухомої  $K$ - системи в сусідніх її точках. Зв'язок між скінченним проміжком власного часу і скінченним проміжком часу, відліченим по годиннику системи відліку, відносно якої тіло рухається, отримують інтегруванням:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt. \quad (1.51)$$



Отже, зміна ходу годинника не має ніякого відношення до порушення темпу ходу годинника в тій або іншій системі відліку. Йдеться про різні способи виміру часу: усі годинники в усіх ІСВ йдуть ідеально точно. Проте порівняння годинника в двох ІСВ призводить до того, що проміжок власного часу між подіями виявляється завжди найменшим.

### 1.13 Релятивістське перетворення швидкостей

Розглянемо дві системи відліку:  $K$  і  $K'$ , і розглянемо точку, що рухається. Рух точки розглянемо з точки зору обох систем відліку. У системі  $K$  рух точки задамо функціями

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$

У системі  $K'$  рух точки задамо відповідно:

$$x' = x'(t'); y' = y'(t'); z' = z'(t').$$

Швидкість точки в обох системах відліку визначимо співвідношеннями:

$$\begin{aligned} K: v_x &= \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt} \\ K': v'_x &= \frac{dx'}{dt'}; v'_y = \frac{dy'}{dt'}; v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Щоб знайти зв'язок між швидкостями в одній і іншій системах відліку, скористаємося перетворенням Лоренца. Перетворення Лоренца можна записати в диференціальній формі, тобто, для нескінченно малих проміжків часу і координат:

$$\begin{aligned} dx' &= \Gamma(dx - Vdt); dy' = dy; dz' = dz; dt' = \Gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right); \\ dx &= \Gamma(dx' + Vdt'); dy = dy'; dz = dz'; dt = \Gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Розділимо праві і ліві частини отриманих співвідношень (1.53) на  $dt$  (або

$dt')$  і врахуємо визначення швидкостей (1.52) в системах  $K$  і  $K'$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma(dx' + Vdt')}{\Gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\Gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{v'_y}{\Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)} = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}; \quad (1.54)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}.$$

Отримані співвідношення (1.54) відомі як лоренцевські перетворення швидкостей. Як видно з цих співвідношень, у разі малих швидкостей ці співвідношення переходять в перетворення швидкостей Галілея (1.40).

Зворотні перетворення можна отримати, замінюючи штрихи на не штрихи і знак швидкості  $V$  в чисельнику і знаменнику (1.54):

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}; \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}. \quad (1.55)$$

Розглянемо **приклад** [6].

Розглянемо зіткнення двох частинок, що летять одна назустріч одній зі швидкістю  $v_0$ . Їх зіткнення можна розглядати в системі відліку, пов'язаній з однією з часток. Підставляючи у формулу (1.54)  $v_x = v_0$ ,  $V = -v_0$ , для відносної швидкості  $v = v'_x$  отримуємо:

$$v = v'_x = \frac{2v_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Як зміниться відносна швидкість, якщо частки зближуватимуться зі швидкостями  $v_0 = c$  ? Обчислення дають наступний результат:

$$v = \frac{2c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c.$$

Звідси отримуємо, що при додаванні швидкостей в СТВ діє неймовірне правило:

$$c + c = c,$$

що підтверджує постулат Ейнштейна про граничну швидкість часток, які не можуть рухатися зі швидкостями, вище за швидкість світла.

### 1.14 Релятивістське перетворення прискорень

У разі перетворення Галілея, як було показано в підрозділі 1.8, при переході від однієї ІСВ до іншої прискорення є інваріантною величиною. Але при русі з релятивістськими швидкостями проекції прискорень,  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  мають вигляд:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt},$$

і не можуть залишатися постійними величинами в різних ІСВ, оскільки ні диференціали проекцій швидкості, ні диференціали часу не є інваріантами перетворень Лоренца.

За визначенням, в системі відліку  $K'$

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}; a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}; a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}.$$

Аналогічно, в системі відліку  $K$  отримуємо:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Знайдемо диференціали для швидкостей, використовуючи (1.54). Обчислення дають:

$$\begin{aligned}
 dv_x &= \frac{dv'_x}{\Gamma^2 \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right)^2}; \\
 dv_y &= \frac{dv'_y \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right) - \frac{V}{c^2} v'_y dv'_x}{\Gamma \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right)^2}; \\
 dv_z &= \frac{dv'_z \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right) - \frac{V}{c^2} v'_z dv'_x}{\Gamma \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right)^2}; \\
 dt &= \Gamma \left( dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right) = \Gamma dt' \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right).
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Поділивши ліві і праві частини диференціалів швидкостей і часу один на одного в (1.56), отримаємо наступні вирази для релятивістського перетворення прискорень:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{a'_x}{\Gamma^3 \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right)^3}; \\
 a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{a'_y \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right) - \frac{V}{c^2} v'_y a'_x}{\Gamma^2 \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right)^3}; \\
 a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{a'_z \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right) - \frac{V}{c^2} v'_z a'_x}{\Gamma^2 \left( 1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right)^3}.
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

Неінваріантність прискорення легко проілюструвати за допомогою (1.57) на такому прикладі [15]. Якщо частинка в системі  $K'$  рухається в напрямі,

перпендикулярному осі  $O'x'$  рівномірно і прямолінійно, тобто в цьому випадку  $v'_x = 0$ ,  $v'_y \neq 0$ ,  $v'_z \neq 0$ ,  $a'_y = 0$ ,  $a'_z = 0$ , а уздовж осі  $O'x'$  – з прискоренням, то в системі  $K$  вона має відмінні від нуля прискорення  $a_y$ ,  $a_z$ . Таким чином, прискорення частинки в релятивістському випадку не є інваріантом перетворення Лоренца.

### 1.15 Класифікація інтервалів

Як встановлено вище, інтервалом між двома подіями в СТВ називають співвідношення (1.41) :

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2. \quad (1.58)$$

Перший доданок в правій частині називають часовою частиною інтервалу, останні три доданків – просторовою частиною інтервалу.

У СТВ величина інтервалу між двома подіями може бути рівною нулю, більше нуля або менше нуля. Це відображає відмінність в причинно-наслідковому зв'язку між подіями [1, 4, 6, 19].

1. Інтервали між подіями, які задовольняють умові

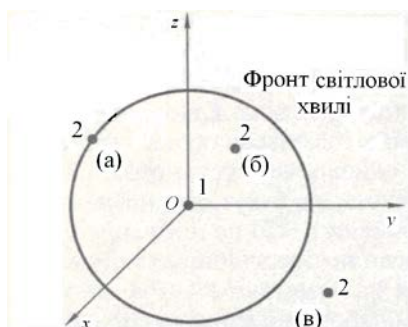
$$\Delta S^2 = 0, \quad (1.59)$$

називають світло-подібними або ізотропними. Виходячи з інваріантності інтервалу між двома подіями відносно перетворень Лоренца, якщо в системі  $K$  інтервал між двома подіями задовольняє (1.59), то в цьому випадку в системі  $K'$  між двома подіями теж  $\Delta S'^2 = 0$ . Таким чином, в даних ІСВ спостерігають повний збіг подій. У системі  $K'$  координати  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  і  $t'$  будуть іншими, але для них теж  $\Delta S'^2 = 0$ , і це виконується в усіх ІСВ, оскільки швидкість світла  $c = \text{const}$  в усіх ІСВ. Це можна ілюструвати наступним прикладом [6, 17, 26]. Нехай в точці  $O$  системи відліку  $K$  відбувається деяка подія 1 і одночасно спалах світла. У точці 2(а)

через час  $\Delta t$  відбувається друга подія, і одночасно з ним світло досягає цієї точки, поширюючись з точки 1 (рис. 1.34). Таким чином, ми спостерігаємо повний збіг подій.

2. Якщо інтервал між двома подіями  $\Delta S^2 > 0$ , такий інтервал називають часово-подібний. Для цього інтервалу характерне перевищення часової частини над просторовою:

$$c^2 \Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (1.60)$$



**Рис. 1.34.** До класифікації інтервалів

Інтервал є дійсною величиною. В цьому випадку спалах світла (рис. 1.34) досягає точки 2(б) раніше, ніж настає друга подія. Оскільки сигнал устигає за час  $\Delta t$  прийти з точки 1 в точку 2, то ясно, що події 1 і 2 можуть бути пов'язані причинно-наслідковими відношеннями: подія 1 можна розглядати як причина, подія 2 – як наслідок.

Якщо інтервал часово-подібний, можливий вибір системи відліку  $K'$ , в якій просторова частина інтервалу перетворюється на нуль. Нехай для простоти події відбуваються в точках на осі  $x$ . Для подій, пов'язаних в системах  $K$  і  $K'$  часово-подібним інтервалом, можемо записати:

$$c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0,$$

тому, що  $\Delta x'^2 = 0$ . З цієї умови можна знайти швидкість системи відліку  $K'$  відносно системи  $K$ , в якій це відбувається. Використаємо для цього перетворення Лоренца і отримаємо:

$$\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V \Delta t) = 0.$$

Звідси, швидкість  $V$  системи відліку  $K'$  складе:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

При такій швидкості  $V$  системи  $K'$  обидві події відбуваються в одній і тій же точці простору в системі відліку  $K'$ .

Таким чином, якщо інтервал між подіями є часово-подібним, то можна вибрати таку систему відліку, в якій дві події відбуваються в одній і тій же точці простору, але в різні моменти часу, і не існує такої системи відліку, в якій ці дві події відбувалися б одночасно. Порядок подій, пов'язаних з часово-подібним інтервалом, зберігається в усіх ІСВ. Отже, для подій, що знаходяться в причинно-наслідковому зв'язку, можна вибрати таку систему відліку, в якій ці події відбуваються в одній і тій же точці простору в послідовні моменти часу.

3. Інтервал, для якого  $\Delta S^2 < 0$ , називають просторово-подібним. В цьому випадку спалах світла (рис. 1.34) досягає точки 2 пізніше за момент настання другої події. Подія 1 не устигає впливати на подію 2, а самі події 1 і 2 не можуть бути пов'язані причинно-наслідковими відношеннями. Для пари подій, розділених інтервалом  $\Delta S^2 < 0$ , поняття одночасно, раніше, пізніше відносні, тобто часова послідовність залежить від системи відліку.

У разі просторово-подібних інтервалів можливий вибір системи відліку  $K'$ , в якій часова частина інтервалу перетворюється на нуль. В цьому випадку можна записати (оскільки часова частина перетворюється на нуль):

$$-(\Delta x'^2) = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x^2 < 0.$$

Швидкість  $V$  такої системи відліку визначають з умови рівності нулю часової частини інтервалу:

$$\Delta t' = \Gamma \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = 0.$$

Звідси отримуємо швидкість системи відліку

$$V = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Оскільки в  $K'$ - системі  $\Delta t' = 0$ , то події одночасні в різних точках і  $\Delta t' = \Delta x^2 = \sqrt{-(\Delta S)^2}$ . Подія 2 може настати раніше події 1, оскільки відсутній причинно-наслідковий зв'язок подій.

Якщо інтервал між подіями просторово-подібний, то можна вибрати таку систему відліку, в якій дві події відбуваються одночасно в різних точках, і не існує такої системи відліку, в якій ці дві події відбувалися б в одній і тій же точці.

### 1.16 Чотиривимірний простір Мінковського

Виходячи з постулатів Ейнштейна, ми прийшли до того, що у світі, де відбуваються фізичні явища, повинен існувати інваріантний зв'язок між трьома координатами і часом у вигляді інтервалу між двома подіями:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.61)$$

Цей зв'язок вказує на те, що вже чотири змінних:  $x, y, z, t$  – пов'язані в деяке єдине ціле. Ми живемо у світі, який описується чотирма змінними, пов'язаними між собою. З іншого боку, ми в 3-вимірному просторі Евкліда і в нім справедлива геометрія Евкліда. Складно собі уявити перехід від 3-вимірного до 4-вимірного простору, але аналогічно можна допустити, що у 4-вимірному світі Евкліда відстань від точки до початку координат має вигляд  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ , де  $u$  – четверта координата. Такий перехід аналогічний переходу від площини до 3-вимірного простору.

Простір, де відстань між точками визначена інваріантом (1.61) носить назву **псевдо-евклідового** простору. Цей простір СТВ з сигнатурою  $(+ - - -)$ , де до трьох просторових координат додана четверта координата  $ct$ . Це породило виникнення особливої геометрії, і геометрична інтерпретація дії постулатів А. Ейнштейна в СТВ належить німецькому



математиків польського походження Г. Мінковському. По Мінковському, усі фізичні явища відбуваються в 4-вимірному просторі-часі, у так званому «світі» по термінології Мінковського. Такий простір називають також простором Мінковського [26].

Таким чином, різноманіття змінних  $x, y, z, t$ , пов'язаних інтервалом (1.61), утворюють простір Мінковського. Причинно-наслідкові відношення між подіями в простому випадку зручно аналізувати з використанням площини Мінковського [4, 6, 17, 20]. Декартовими координатами на цій площині є  $(x, ct)$ , а осі  $(y, z)$  поєднані. Процес руху частинки – це послідовність подій світових точок, а траєкторія – світова лінія в просторі Мінковського. Будь-які події на осі  $Ox$  системи  $K$  відображаються як



**Рис. 1.35. Переріз просторово-часового конуса площиною  $(x, ct)$**

точки на площині Мінковського. Якщо на початку координат у момент часу  $t=0$  стався спалах світла, то координати хвильового фронту визначаються співвідношенням  $x = \pm ct$ , що зображується двома бісектрисами (штрихові лінії на рис. 1.35). Ці дві бісектриси розбивають площину на чотири квадранти I, II, III, IV, які називають майбутнє, минуле, нейтральна область (абсолютно видалені події) і друга нейтральна область відповідно. Для пунктирних прямих виконується рівність  $S^2 = c^2 t^2 - x^2 = 0$ . У областях I, II  $S^2 = c^2 t^2 - x^2 > 0$ . Отже, інтервал між будь-якими подіями в області I і цією подією в точці  $O$  часово-подібний. Події з області, де розташована точка  $P_2$ , «майбутнє», пов'язані з нульовою подією (подією в точці  $O$ , «минуле») часово-подібним інтервалом: будь-яка подія  $P_2$  з майбутнього настає пізніше за нульової, і може бути його слідством. Аналогічно,

довільна подія  $P_1$  з минулого сталася раніше нульової, і може бути причиною цієї нульової події. Таким чином, для спостерігача в точці  $O$  усі події з нижнього конуса сталися у минулому, а з верхнього – настануть в майбутньому. У областях III, IV (нейтральна область)  $S^2 < 0$ , тобто інтервал між подіями в цій області і подією в точці  $O$  просторово-подібний. Будь-які події з нейтральної області (точки  $D_1, D_2$ ) не пов'язані причинно-наслідковим зв'язком з точкою  $O$ . Це не можна змінити ніяким вибором системи відліку. Проте можна знайти такі системи відліку, у яких ця подія з області III або IV настала б раніше, або пізніше, або, нарешті, одночасно з подією  $O$ , оскільки поняття «одночасно», «раніше», «пізніше» для подій цієї області відносні.

У повному 4-вимірному просторі рівняння, що описує поширення світла, має, як відомо вид:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

З геометричної точки зору в 4-просторі це рівняння описує «конус», який зазвичай називають **світловим конусом**. Внутрішні порожнини конуса відповідають областям «абсолютного майбутнього» і «абсолютного минулого». Світловий конус, на якому лежать світло-подібні напрями, характеризуються ще і тим, що при усіх переходах з однієї ІСВ до іншої його положення в 4-вимірному просторі для кожної світової точки залишається незмінним.

Координатна вісь  $x$  і усі прямі, паралельні їй  $(a_1, a_2)$ , – це лінії одночасності в системі відліку  $K$  (рис. 1.36). Будь-які дві події на цій

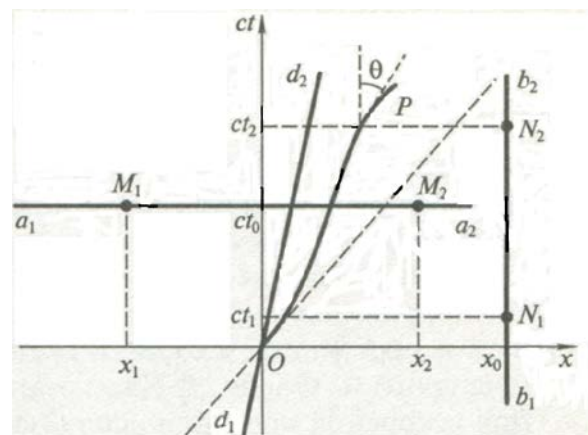


Рис.1.36. Співвідношення між подіями в площині  $(x, ct)$

лінії ( $M_1, M_2$ ) одночасні, тобто відбуваються в один і той же момент часу  $t_0$  за годиннику системи  $K$ , але в різних точках простору  $x_1, x_2$ . Ці події пов'язані просторово-подібним інтервалом, і між ними немає причинно-наслідкового зв'язку. На осі ординат ( $x = 0$ ) і усіх прямих  $x = \text{const}$  (лінія  $b_1 b_2$ ) відображені події, що відбуваються в одній і тій же точці простору, але в різні моменти часу. Будь-які дві події, наприклад,  $N_1 N_2$ , сталися в одній точці, але в різні моменти часу  $t_1, t_2$ . Вони пов'язані часово-подібним інтервалом і між ними можливий причинно-наслідковий зв'язок.

На площині Мінковського можна відобразити не лише події, але і рухи частинок. Рух частинок з постійною швидкістю  $V$  відображається на цій площині прямою, кут нахилу якої до осі  $ct$  не перевищує  $45^\circ$ , якщо  $V < c$ . Ці прямі – світові лінії частинок, що рухаються. Якщо, наприклад, у момент часу  $t = 0$  частинка знаходилася в точці  $x = 0$ , її світова лінія – це пряма  $d_1 d_2$  (рис. 1.36) і розташована в квадрантах I - II «минуле-майбутнє». Рівняння цієї прямої може бути представлене, як

$$ct = \frac{x}{\beta}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (1.62)$$

Якщо швидкість частинки – величина змінна, то її світова лінія – деяка крива  $OP$  на площині Мінковського, рівняння якої має вигляд

$$ct = f(x).$$

Дотична до цієї кривої у будь-якій точці утворює з віссю ординат кут  $\theta$ , тангенс якого  $\text{tg}\theta = \beta$ , оскільки  $V \leq c$ , а  $\theta \leq 45^\circ$ .

### 1.17 Чотиривимірні вектори

Для розуміння суті перетворень Лоренца з точки зору 4-вимірною

простору Мінковського розглянемо наступну аналогію з 3-вимірною простору [19]. Розглянемо перетворення 3-вимірною евклідового простору у разі повороту однієї системи координат відносно іншої, причому розглянемо тільки поворот в площині  $(x, y)$  на скінченний кут  $\varphi$  відносно осі  $z = z'$  (рис. 1.37). З геометрії відомо, що такий закон перетворення координат має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \\ y' = -y \sin \varphi + x \cos \varphi; \\ z' = z. \end{cases} \quad (1.63)$$

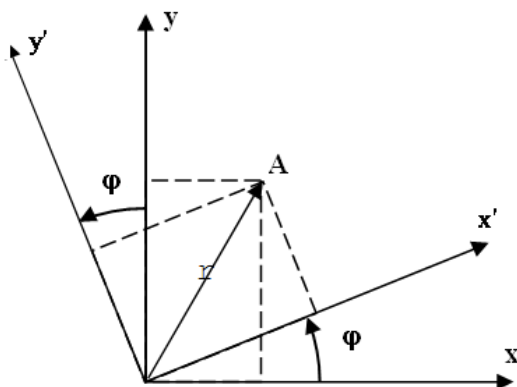
або в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

При такому перетворенні відстань між будь-якими двома точками на площині не змінюється, тобто це є величина абсолютна, інваріантна по відношенню до повороту системи координат:

$$OA = l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

У цьому можна переконатися безпосередньо.



**Рис. 1.37.** Поворот площини  $(x, y)$  на скінченний кут  $\varphi$

У просторі Мінковського незмінною (інваріантною) є величина інтервалу між двома подіями при переході від однієї ІСВ до іншої, незважаючи на зміни як координат подій, так і часу. Тому, по аналогії з поворотом системи координат в просторі, перетворення Лоренца, що описують перехід від однієї ІСВ до

іншої, можна розглядати як перетворення чотиривимірного радіус-вектору події  $(ct, x, y, z)$  в 4 - вимірному просторі-часі, при якому  $\Delta S^2 = \Delta S'^2$ .

Введемо поняття 4-вектора простору-часу Мінковського і визначимо компоненти цього вектора таким чином [1, 4, 15]:

$$x_0 = ct; x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z. \quad (1.65)$$

Отже, 4-вимірний радіус-вектор матиме наступні компоненти:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}(ct, x, y, z) = \mathbf{R}(ct, \mathbf{r}). \quad (1.66)$$

Рівняння (1.61)

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

формально нагадує квадрат довжини вектора  $S$  в звичайних декартових координатах, а перехід з однієї ІСВ до іншої – поворот осей координат, тобто поворот однієї гіперплощини в просторі Мінковського відносно іншої. При цьому кут повороту площини пропорційний відношенню  $\beta = \frac{V}{c}$  – відношенню швидкості однієї системи відліку по відношенню до іншої системи відліку і швидкості світла.

Насправді, формулу перетворення компонент  $x_0, x_1, x_2, x_3$  4-вектора при переході до іншої системи відліку можна записати у вигляді:

$$x_0 = ct = c \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x'_0 + \beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Gamma(x'_0 + \beta x'_1); \quad \beta = \frac{V}{c};$$

$$x_1 = \frac{x'_1 + \beta x'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Gamma(x'_1 + \beta x'_0);$$

$$x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3.$$

Формулу повного перетворення можна записати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_0 = \Gamma x'_0 + \beta \Gamma x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3; \\ x_1 = \beta \Gamma x'_0 + \Gamma x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3; \\ x_2 = 0x'_0 + 0x'_1 + 1x'_2 + 0x'_3; \\ x_3 = 0x'_0 + 0x'_1 + 0x'_2 + 1x'_3. \end{cases} \quad (1.67)$$

Зазвичай це може бути записано як перетворення виду:

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k; \quad x_i = \sum_{k=0}^3 \alpha_{ik} x'_k, \quad i=0 \dots 3,$$

де  $\alpha_{ik}$  – матриця переходу, яка має наступний вигляд:

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & \beta\Gamma & 0 & 0 \\ \beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Тому в матричному вигляді отримане перетворення може бути записане таким чином:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & \beta\Gamma & 0 & 0 \\ \beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

де новий 4-вимірний радіус-вектор (4-радіус-вектор) отримують за звичайними правилами перемножування матриці на стовпець. Зворотнє перетворення отримують заміною штрихів на не штрихи і знаку  $\beta$ :

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\beta\Gamma & 0 & 0 \\ -\beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Квадратом довжини 4-вектора є квадрат інтервалу, відліченого від початку координат:

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Щоб зрозуміти суть відмінності 3- і 4-векторів, треба пам'ятати, що в іншій ІСВ має місце ефект скорочення довжини. Тому звичайні вектори (3-вимірні) не можуть бути векторами простору Мінковського, і, отже, єдиною комбінацією (інваріантом), що не змінюється, є квадрат інтервалу  $S^2$ .

### 1.18 Про комплексні величини у визначенні інтервалу

Вище був визначений інтервал між подіями (1.41) і (1.42). В деяких випадках [4] з метою формальної зручності часову координату інтервалу вводять у вигляді  $\tilde{t} = ict = it$ , де  $i$  – уявна одиниця,  $i = \sqrt{-1}$ . Введення таких координат зручне при викладі курсу релятивістської теорії поля і електродинаміки (див. книгу Л. Ландау, Е. Ліфшиц «Теорія поля», М., Наука, 1973 р.). В принципі без уявної одиниці можна обійтися. Це лише зручний формальний прийом, уявна одиниця грає допоміжну роль. Інтервал між події набирає вигляду:

$$S^2 = -(c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2). \quad (1.71)$$

На відміну від (1.64), при введенні комплексної величини можна показати, що кути повороту однієї псевдо площини відносно іншої будуть уявними величинами, а від прямокутної системи відліку ми переходимо до косокутної. Кут повороту також уявний. Міняється вид матриці перетворення. Замість (1.68) вона має вигляд:

$$\tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & -i\beta\Gamma & 0 & 0 \\ i\beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

### Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Задано рівняння руху точки:  $x = \sqrt{3} \cos t - \sin t$ ;  $y = \cos t - \sqrt{3} \sin t$ . Знайти тангенціальне, нормальне прискорення точки, а також радіус кривизни траєкторії в момент часу  $t = 0.5\pi$ .

1.2. Точка описує коло радіуса  $R$ . Прискорення точки утворює з її швидкістю кут  $\alpha$  ( $\alpha \neq \pi/2$ ). Знайти, як змінюється від часу швидкість, тангенціальне і повне прискорення точки, а також шлях, пройдений точкою, якщо в початковий момент часу швидкість точки дорівнювала  $v_0$ .

1.3. Знайти кутову швидкість, кутове прискорення і миттєву вісь обертання колеса трамвая під час повороту. Колесо рухається без ковзання з постійною за модулем швидкістю  $V$  по рейці з радіусом закруглення  $R$ . Радіус колеса  $r$ .

1.4. Тіло кинули під кутом  $\alpha$  до горизонту. В деякий момент часу  $t^*$  радіус-вектор  $\mathbf{r}$ , проведений з точки кидання, і швидкість тіла  $\mathbf{v}$  стали взаємно перпендикулярними один одному. Для якого кута кидання  $\alpha$  це можливо? Якщо це можливо, коли це може статись: під час підйому тіла або під час зниження?

1.5. Візок котиться по горизонтальній мокрій дорозі з постійною швидкістю  $v_0$ . На яку максимальну висоту піднімуться краплі води, які відриваються від колесив? В якій точці має одірватися крапля, щоб піднятися вище інших?

1.6. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що кутова швидкість змінюється за законом  $\omega = 0.5\omega_0(1 + \cos \varphi)$ , де  $\varphi$  – кут повороту,  $\omega_0$  – додатна стала. В початковий момент часу для  $t_0 = 0$  вважати, що кут  $\varphi = \varphi_0$ . Знайти залежність від часу: 1) кута повороту; 2) кутової швидкості.



1.7. Під яким кутом до горизонту необхідно кинути каміння зі швидкістю  $v_0$ , щоб він потрапив у точку А, розташовану на висоті  $h$  і на відстані  $L$  від місця кидання.

$$\left( \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gL} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} - \frac{2gh}{v_0^2}} \right] \right)$$

1.8. По стінці дому втягують колоду довжиною  $L$  таким чином, що її верхній кінець рухається вертикально вгору із постійної швидкістю  $V$ , а нижній пересувається по землі. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення як функцію часу для точки колоди, яка розташована на відстані  $l$  від кінця, що знаходиться на землі.

$$\left( \dot{x}_l = \frac{V^2 t}{\sqrt{L^2 - V^2 t^2}} \left( \frac{l}{L} - 1 \right); \ddot{x}_l = \frac{V^2 L (l - L)}{(L^2 - V^2 t^2)^{3/2}}; \dot{y}_l = \frac{l}{L} V; \ddot{y}_l = 0 \right)$$

1.9 Матеріальна точка рухається так, що її радіус-вектор залежить від часу за законом:  $\mathbf{r} = 3t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$  [м]. Знайти радіус кривизни траєкторії в момент часу  $\tau$ .

1.10 Електрон в постійному магнітному полі рухається уздовж гвинтової лінії, рівняння якої має вигляд:  $x = b \cos \omega t$ ,  $y = b \sin \omega t$ ,  $z = ct$ , де  $b$  і  $c$  – додатні сталі. Знайти тангенціальне  $a_\tau$ , нормальне  $a_n$  прискорення та радіус кривизни  $R$  траєкторії.

1.11 Залежність модуля прискорення  $a$  точки від швидкості  $v$  визначається функцією  $a(v) = a_0 - bv$ , де  $a_0$ ,  $b$  – додатні стали. Знайти: 1) залежність швидкості від часу; 2) пройденого шляху від часу.

1.12. У лабораторній системі координат дві події сталися в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5$  в моменти часу  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 4/3 \cdot 10^{-8}$  с. Знайти систему координат, в якій просторова і часова відстані між подіями мінімальні. Чому вони дорівнюють?

1.13. Вивести формулу релятивістського перетворення прискорень.

1.14. Системи відліку  $S_1$  і  $S_2$  рухаються у напрямку вісі  $X$  із швидкостями  $v_1$  і  $v_2$  відповідно відносно системи відліку  $S$ . Виміряний в системі відліку  $S$  інтервал часу, за який стрілка годинника в системі відліку  $S_1$  здійснить один оберт, дорівнює  $t$ . Який інтервал часу  $t_2$ , виміряний у системі  $S_2$ ?

$$\left( t_2 = \left( 1 - \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) t \right)$$

1.15. У двох точках інерціальної системи відліку  $K$  здійснились події, які розділені проміжком часу  $\Delta t$ . Покажіть, що якщо ці події причино пов'язані у системи  $K$ , то вони також причино пов'язані і в будь-якій іншій інерціальній системі відліку.

1.16. Перетворення Лоренца були отримані для випадку, коли система відліку рухається вздовж якою-небудь вісі, зокрема, вздовж вісі  $X$ . Отримайте формулу перетворення Лоренца у випадку довільного кута між швидкістю  $V$  системи відліку і віссю  $X$ . (Вказівка: представити радіус-вектор точки у вигляді суми двох векторів: вздовж швидкості і поперек).

1.17. Знайти матрицю перетворення Лоренца для руху системи відліку (СВ) уздовж осі  $X$  із швидкістю  $V_x$ , услід за яким здійснюється рух уздовж осі  $Y$  із швидкістю  $V_y$ . Довести, що той же рух в зворотному порядку призводить до інших перетворень.

1.18 У  $K$ -системі відліку розміщено рівносторонній трикутник зі стороною  $a$ , причому одна із сторін розташована уздовж напрямку  $Ox$  системи  $K$ . Система відліку  $K'$  рухається з постійною швидкістю  $V$  у напрямку осі  $Ox$  нерухомої системи відліку  $K$ . В системі відліку  $K'$  визначити периметр і площину трикутника.

## РОЗДІЛ II

### ДИНАМІКА ТОЧКИ І СИСТЕМИ ТОЧОК

#### 2.1 Задача динаміки

У кінематиці рух тіл розглядається поза зв'язком з причинами, що викликають цей рух. Задача динаміки полягає в тому, щоб встановити взаємозв'язок між рухом тіла і тими причинами, які викликали або змінили цей рух.

В основі динаміки лежать три закони Ньютона. Перший закон Ньютона був розглянутий вище. Перший закон Ньютона відповідає на питання: чи існують такі системи відліку, в яких прискорення матеріального тіла обумовлене тільки його взаємодією з іншими тілами, а не за рахунок властивостей самої системи відліку? Перший закон Ньютона ствердно відповідає на це питання: «Всяке тіло продовжує утримуватися у своєму стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, доки і оскільки воно не вимушено прикладеними силами змінити цей стан». Таким чином, дійсно існують такі системи відліку (СВ), що називаються інерціальними (ІСВ), в яких вільне тіло, яке не зазнає дії інших тіл, рухатиметься рівномірно і прямолінійно, або за інерцією. Існує безліч інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно в силу однорідності і ізотропної простору, і класична механіка постулює, що такі ІСВ існують, наявність таких ІСВ підтверджує експеримент. У цих системах усі вільні тіла або зберігають стан спокою, або рухаються рівномірно і прямолінійно. Це істотно для динаміки, оскільки вибір системи відліку і переваги тієї чи іншої змінюють спосіб опису руху, чого немає в кінематиці: вибір тієї або іншої системи відліку в кінематиці диктується лише зручністю її використання.

## 2.2 Другий закон Ньютона

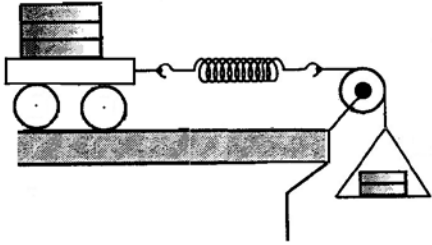
В інерціальних системах відліку довільне ізольоване тіло або матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно. Що викликає рух тіла, а, головне, що викликає зміну стану тіла, зміна його швидкості і напрямку руху? Згідно Ньютона «...прикладена сила є дія, здійснювана над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху». Якщо вдаватися до походжень поняття сили, то можна повернутися до часів Арістотеля, який вивчав причини зміни стану тіл [1, 2]. В сучасному розумінні **сила розглядається як кількісна міра взаємодії тіл** [5, 6]. Водночас передбачається, що в ІСВ завжди можна вказати джерело сили, а для вирішення задач – визначити закон дії сили. Сила не є якоюсь самостійною суттю, вона створюється матеріальними тілами і залежить від цих тіл. Саме за допомогою сил тіла діють один на одного, тобто взаємодіють. Сила при цьому виступає як кількісна міра інтенсивності взаємодій. Вже в першому законі Ньютоном дана оцінка дії сили: тільки сила може змінити стан спокою або рівномірного прямолінійного руху тіла. Що буде з тілом, якщо на це тіло діють сили, як це тіло рухатиметься – на це питання відповідає другий закон Ньютона.

У основі другого закону Ньютона лежить декілька емпіричних чинників [6, 13, 27].

1. Початковий емпіричний факт, вже згадуваний вище: тіло набуває прискорення тільки у тому випадку, якщо на це тіло діє інше тіло; у класичній механіці передбачається, що тіло саме на себе не діє. Ще Галілей вказав на те, що збереження швидкості відбувається в силу закону інерції, а ось зміна швидкості, наявність прискорення є дією сил, результат взаємодії.

2. У яку сторону рухається тіло? Вектор прискорення матеріального

тіла (точки) спрямований в напрямку з вектором сили:  $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{F}$ , причому це вірно тільки у рамках класичної механіки, для механіки СТВ в загальному випадку це не виконується.



**Рис. 2.1.** До пояснення II закону Ньютона

3. Модуль прискорення тіла пропорційний модулю сили  $|\mathbf{a}| \sim |\mathbf{F}|$ . У цьому можна переконатися, вимірюючи прискорення тіла при різних кількості вантажів, що рухають візок (рис. 2.1).

4. Прискорення тіла залежить не лише від дії зовнішніх сил, але і від власної властивості самої матеріальної точки – її інертної властивості, її інертності. Це теж можна проілюструвати досвідом, аналогічним попередньому. Встановлюючи на візок різні вантажі, прискорення його під дією однієї і тієї ж сили змінюватиметься обернено пропорційно до кількості вантажів.

Таким чином, прискорення тіла залежить від його інертності – неподатливості до зміни швидкості під дією прикладеної сили. Чим більше брусків, з яких складено тіло, тобто чим більше його інертність, тим менше прискорення набуває тіло. З іншого боку, різні сили одному і тому ж тілу надають різні прискорення. Проте відношення сили до прискорення є постійним

$$\frac{F}{a} = \text{const.} \quad (2.1)$$

Ця постійна величина для різних тіл має різне значення, але для кожного конкретного тіла воно має певну величину. Ця величина характеризує властивість інертності тіла і називається його масою  $m$ . Властивість тіл придбавати певне прискорення під дією цієї сили називається інертністю тіла. Тому в результаті і отримуємо співвідношення (2.1).

Якщо співвідношення (2.1) записати у векторній формі з урахуванням

того, що напрями сили і прискорення співпадають, то отримаємо математичне формулювання другого закону Ньютона:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

За одиницю сили приймають силу, яка масу 1 кг (масу вимірюють в кілограмах, кг) надає прискорення  $1 \text{ м/с}^2$ . Ця сила дорівнює  $1 \text{ н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$  – один ньютон. Отже, другий закон Ньютона встановлює кількісне співвідношення між силою і прискоренням. Його формулюють таким чином: *прискорення, що надається тілу силою  $\mathbf{F}$ , спрямоване уздовж сили, пропорційно її величині і обернено пропорційно масі тіла.*

Зазначимо таке.

1. Співвідношення (2.1)  $\frac{\mathbf{F}}{a} = m$  характерне для швидкостей, далеких від релятивістських.

2. Якщо маса і прискорення інваріантні відносно перетворень Галілея, то сила  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  також інваріантна, оскільки усі сили в механіці є функціями тільки інваріантних величин: координат і швидкостей взаємодіючих тіл. Таким чином рівняння  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  справедливе у будь-якій ІСВ, що повністю відповідає принципу відносності Галілея.

3. Рівняння  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  має сенс тільки тоді, коли вказана система відліку (ІСВ), в якій воно справедливе, саме в ній рух тіла підкоряється цьому рівнянню.

Рівняння (2.2) називають рівнянням руху. Найбільш загальний запис такого рівняння має вигляд:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Це рівняння може бути застосовано лише до матеріальної точки. До матеріального тіла його можна застосувати, якщо під  $\mathbf{v}$  розуміти швидкість центру мас тіла, а не якої-небудь довільної його точки.

Фізичний зміст другого закону Ньютона полягає в тому, що сила визначає другу похідну координат за часом.

Рівняння руху дає можливість вирішити дві основні задачі динаміки матеріальної точки: пряму і зворотну [2, 23]. Пряме завдання полягає в тому, щоб знайти закон руху точки, тобто  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , якщо відома маса і сила, що діє на точку. Знаючи прискорення точки, можна визначити і її швидкість, а знаючи початкове положення точки і початкову швидкість, можна визначити її положення у будь-який момент часу:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) = \int \mathbf{F}/m \, dt + \mathbf{C}; \\ \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{C}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

У цьому проявляється детермінізм рівняння руху Ньютона. Зворотна задача динаміки – знайти діючу силу  $\mathbf{F}(t)$ , якщо відомі маса і закон руху точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ :

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

При рішенні конкретних задач вибирають відповідну систему координат і записують в ній рівняння руху проекцій векторних величин, що входять туди:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z.\tag{2.4}$$

Наприклад, при русі точки по криволінійній траєкторії під дією сили  $\mathbf{F}$  (рис. 2.2) точка має нормальне  $a_n$  і тангенціальне  $a_\tau$  прискорення. Проектуючи обидві частини рівняння (2.2) на ці два напрями, матимемо:

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad m \frac{v^2}{R} = F_n,\tag{2.5}$$

де  $F_\tau, F_n$  – проекції сили на напрями векторів  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$  – дотичного і нормального до дотичного відповідно. Вектори  $\mathbf{F}_\tau = \boldsymbol{\tau} F_\tau$  і  $\mathbf{F}_n = \mathbf{n} F_n$  називають тангенціальній і нормальній складовими вектора  $\mathbf{F}$ . Оскільки

$\mathbf{F}$  – вектор, то при дії на матеріальну точку декількох тіл, тобто при взаємодії матеріальної точки з декількома такими ж точками, сумарна сила

$$\mathbf{F} = \sum_i^n \mathbf{F}_i \text{ дорівнює сумі взаємодії окремих тіл, за}$$

умови незалежності впливу цих тіл один на одного, тобто вважаючи, що наявність інших тіл не змінює умови взаємодії [8]. Це означає, що у виразі

$$\mathbf{F} = \sum_i^n \mathbf{F}_i \text{ дія кожної } i\text{-тої сили на матеріальну точку не залежить від дії}$$

інших сил, тобто сили підкоряються принципу суперпозиції.

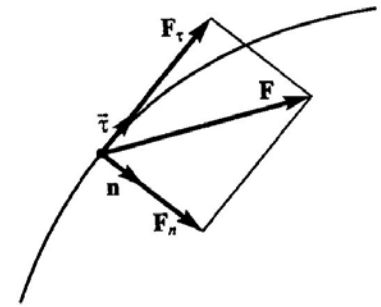


Рис. 2.2. Рух точки по криволінійній траєкторії під дією сили  $\mathbf{F}$

### 2.3 Третій закон Ньютона

Досвід показує, що коли одне тіло діє на інше, то це інше тіло, у свою чергу, діє на перше. Сформулюємо цей закон в наступному виді: **дії завжди є рівна і протилежна протидія. Іншими словами: сили, що виникають при взаємодії двох тіл, однакові за величиною і протилежні за напрямом:  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ .**

Як впливає з формулювання, третій закон нічого не говорить про величину сили, а тільки про те, що вони (ці сили) рівні. Тому різниця між діючою і протидіючою силами має суб'єктивний характер і залежить від точки зору. Фізичний сенс цього закону в наступних твердженнях [1, 2, 5]: 1) сили виникають парами і мають однакову природу, вони прикладені до різних тіл; 2) ці сили рівні за величиною; 3) сили діють уздовж прямої в протилежних напрямках.

У третьому законі Ньютона передбачається, що обидві сили рівні по модулю у будь-який момент часу незалежно від руху точок. Це відповідає



ньютонівському уявленню про миттєве поширення взаємодії, про існування так званого принципу далекодії ньютонівської механіки [14]. Згідно з ним, взаємодії між тілами поширюються з нескінченно великою швидкістю. Проте це не так – існує скінченна максимальна швидкість поширення взаємодії – це швидкість світла у вакуумі. Тому третій закон має певні межі застосування. Але в класичній механіці з малими швидкостями взаємодії він виконується з великою точністю.

## 2.4 Сили в механіці

Розглянемо основні види сил, що вводяться при опису механічних явищ. Як відомо, основними фундаментальними силами в природі є гравітаційні і електромагнітні [3, 5, 6]. Ці дві основні сили лежать в основі усіх механічних явищ. Проте, як правило, обмежуються наближеними законами дії цих сил – силами тяжіння, пружності, тертя.

**1. Сила тяжіння.** Це сила гравітаційної взаємодії тіла і Землі:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}.$$

Для тіла у поверхні Землі модуль цієї сили рівний:

$$F = mg = G \frac{mM_3}{R_3^2},$$

де  $M_3$  – маса Землі;  $R_3$  – радіус Землі;  $g = G \frac{M_3}{R_3^2}$  – прискорення вільного

падіння на поверхні Землі  $g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$ ;  $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$  –

гравітаційна стала. Величина  $g$  залежить від висоти над поверхнею Землі, і зменшується з висотою  $h$  обернено пропорційно квадрату відстані  $\frac{1}{r^2}$  від центру Землі. На висоті  $h = 100 \text{ км}$  воно складає:

$$g(h) = G \frac{M_3}{r^2} = G \frac{M}{(R_3 + h)^2} \approx G \frac{M_3}{R_3^2} \left( 1 - \frac{2h}{R_3} \right) \approx 9.5 \text{ м/с}^2,$$

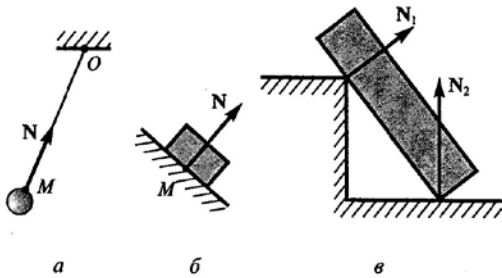
тобто убиває всього на 3.5 %. Тому при розгляді рухів поблизу поверхні Землі можна вважати  $g = \text{const}$ .

**2. Кулонівські сили.** Це сила взаємодії двох точкових зарядів  $q_1, q_2$  :

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

**3. Пружна сила.** При малих деформаціях розтягування або стискання, як встановив Гук,  $F = -k\Delta l$ , де  $\Delta l$  – мала пружна деформація,  $k$  – коефіцієнт жорсткості. Ця сила має електромагнітну природу.

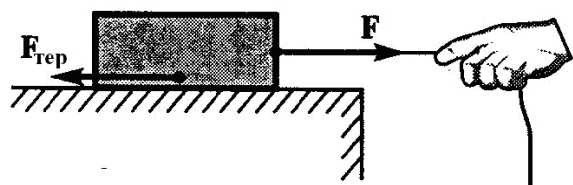
**4. Сила реакції зв'язку.** У багатьох задачах зустрічається ситуація, коли переміщенню тіла перешкоджають які-небудь тіла, що стикаються з ним. В цьому випадку говорять про наявність руху із зв'язками. Наприклад, вантаж на похилій площині. Під дією заданих прикладених сил це тіло деформуватиме тіло, що обмежує його рух, і, саме деформуючись, має діяти на нього з деякою силою. Згідно з третім законом Ньютона,



**Рис. 2.3.** Приклади сил реакції зв'язку: а - нерозтяжній нитці; б - гладкій похилій площині; в - гладких опор, ідеальні зв'язки

обмежуюче тіло також діятиме на це тіло з рівною, але протилежною силою, що називається силою реакції зв'язку. Сила реакції зв'язку спрямована по нормалі до поверхні тіл, що беруть участь в зіткненні, у разі гладких опор. Коли реакція нормальна до переміщення тіла, такий зв'язок називається ідеальним. На рис. 2.3 показані деякі приклади сил реакції зв'язку (інші сили не показані). На рис. 2.3 (а) зв'язок здійснюється за допомогою гнучкої нерозтяжної нитки, що утримує тіло М на одній і тій же відстані від точки підвісу О. Сила реакції  $\mathbf{N}$  спрямована уздовж нитки.

**5. Сили тертя.** За допомогою невеликої прикладеної сили зрушити масивне тіло на рівній горизонтальній поверхні не вдається через **силу тертя спокою**, прикладену до тіла.



**Рис. 2.4. Сила тертя спокою**

Сила тертя спокою урівноважує прикладену до тіла силу  $F_{\text{тер.}} = F$ . Величина  $F_{\text{тер.}}$  не може перевищити

деякого граничного значення сили  $F_0$  (максимальна сила тертя спокою). Коли горизонтально прикладена сила  $F$  перевищить величину  $F_0$ , тіло зрушиться (рис. 2.4).

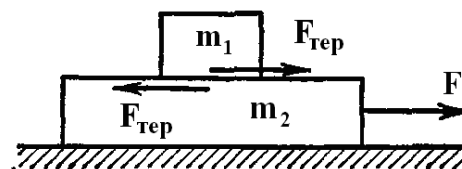
Розглянемо систему з двох брусків, що лежать один на одному, і розташовані на гладкій горизонтальній поверхні (рис. 2.5). Під дією деякої сили, прикладеної до нижнього бруска, обидва бруски рухаються як єдине ціле. На верхній брусок в цьому випадку діє сила  $F_{\text{тер.}}$  (сила тертя спокою), що перешкоджає відносному пересуванню брусків і спрямована в ту ж сторону, і сила  $F$ . Саме ця сила  $F_{\text{тер.}}$  забезпечує рух верхнього бруска з прискоренням  $a$ . Насправді, рівняння руху для тіл  $m_1$ ,  $m_2$  має вид відповідно:

$$\begin{cases} m_1 a = F_{\text{тер.}}; \\ m_2 a = F - F_{\text{тер.}} \end{cases}$$

Звідси:

$$(m_1 + m_2)a = F; \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2}; \quad F_{\text{тер.}} = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2}.$$

Якщо збільшувати силу  $F$ , то  $F_{\text{тер.}}$  зростатиме до величини  $F_0$ , а потім почнеться відносне ковзання брусків. Таким чином, сила тертя спокою спрямована у бік, протилежний до того відносного переміщення тіла, яке спостерігалось б у відсутність тертя. Причина тертя – нерівності, виступи і западини на поверхні дотичних тіл. Ці сили мають у тому числі і



**Рис. 2.5. Дія сили тертя на окремі бруски системи з двох брусків**

електромагнітне походження.

На відміну від сили тертя спокою, **сила тертя ковзання** виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого і спрямована проти відносної швидкості. У першому наближенні вона залежить від площі дотику тіл. Її можна представити таким виразом:

$$F_{\text{тер.}} = \mu N, \quad (2.6)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт тертя ковзання, залежний від природи сил і станів поверхонь дотику;  $N$  – нормальна реакція опори. Це так званий закон Амонтона-Кулона. Розглядаючи багато явищ за участю сили тертя ковзання, можна користуватися спрощеною моделлю, згідно якої сила тертя ковзання не залежить від швидкості.

**Сила в'язкого тертя.** Це сила опору руху тіла у в'язкому середовищі, рідині, газі. Характерною особливістю цієї сили є те, що вона дорівнює нулю для тіл, нерухомих відносно цих середовищ. Тобто, вона виникає тоді, коли тіло починає рух у в'язкому середовищі. При досить малих швидкостях опір середовища, з яким воно діє на тіло, можна описати, як пропорційне швидкості:

$$\mathbf{F}_{\text{тер.}} = -\alpha \mathbf{v}. \quad (2.7)$$

У разі збільшення швидкості ця залежність переходить в квадратичну:

$$\mathbf{F}_{\text{тер.}} = -\beta v^2 \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.8)$$

Знак «мінус» означає, що сила в'язкого тертя завжди спрямована у бік, протилежний руху. Коефіцієнти  $\alpha, \beta$ , а також область швидкостей, при яких лінійна залежність (2.7) переходить в квадратичну (2.8), істотно залежать від форми і розмірів тіла, стану поверхонь і властивостей самого середовища руху.

Як відбувається взаємодія тіл? Взаємодія тіл може відбуватися або при їх безпосередньому контакті, або на відстані. У першому випадку сили, що

виникають, викликаються взаємною деформацією тіл. Крім того, взаємодію можна описати силами натягу і тиску. Окрім цього, в природі існують сили, що діють на відстані без участі проміжного середовища. У механіці Ньютона припускають, що передача взаємодії у такий спосіб призводить до практично важливих результатів тільки тоді, коли швидкості усіх тіл даної системи зневажливо малі порівняно зі швидкостями поширення взаємодії. У цьому випадку говорять, що така взаємодія здійснюється полями.

## **2.5 Імпульс матеріальної точки. Імпульс сили**

При рішенні багатьох задач механіки доводиться мати справу не з одним тілом (матеріальною точкою), а з сукупністю тіл (системою матеріальних точок). З часом положення і швидкості матеріальних точок змінюються, отже, змінюється стан системи. При цьому, знаючи початкові умови і закони діючих сил, можна визначити стан системи у будь-який момент часу, і тут проявляється детермінізм другого закону Ньютона [3]. Проте, є велика група задач, що не потребують знань деталей руху, а вимагають тільки визначити кінцевий і початковий стан системи після ряду взаємодій складових її частин. Чи існують загальні принципи, які дозволили б, не вдаючись до деталей поведінки системи, зв'язати її початковий і кінцевий стани, і ці принципи мають бути узгоджені із законами Ньютона? Так, такі принципи існують – це закони збереження. Це фундаментальні принципи фізики, вони виходять за рамки механіки і являють собою універсальні закони природи, пов'язані з фундаментальними властивостями простору і часу – однорідністю і ізотропністю.

Для подальшого викладу введемо ряд нових понять.

Імпульс або кількість руху матеріальної точки визначимо як добуток маси точки на її швидкість:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (2.9)$$

Запишемо рівняння другого закону Ньютона у вигляді:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.10)$$

У переважній більшості випадків в механіці Ньютона вважають  $m = \text{const}$  і вираз для другого закону Ньютона в (2.10) розрізняються чисто формально.

Рівняння  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  можна інтегрувати і визначити приріст імпульсу за скінченний проміжок часу  $\Delta t = t - t_0$ :

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt. \quad (2.11)$$

При  $\mathbf{F}(t) = \text{const}$   $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$ .

Отримані вирази  $\int_0^t \mathbf{F}(t) dt$ ,  $\mathbf{F} \Delta t$  називають імпульсом сили за проміжок



**Рис. 2.6.**  
До  
пояснення  
дії  
імпульсу  
сили

часу  $\Delta t$ . Ці рівняння означають, що приріст кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійною усіх сил, що діють на цю точку. Таким чином, кількість руху, що набула точка, залежить не лише від величини сили, але і від тривалості її дії [1, 2, 5, 6]. Це можна ілюструвати дослідом. Наприклад, нехай важка куля прив'язана на нитці, а знизу до кулі теж прив'язана нитка. Якщо повільно тягнути за нижню нитку, рветься верхня, якщо швидко смикнути за нижню нитку, рветься саме нижня (рис. 2.6).

Якщо на точку не діють ніякі сили, тобто  $\mathbf{F} = 0$ , то імпульс зберігається,

$\mathbf{p} = \text{const}$ , що відповідає тому, що точка рухається рівномірно і прямолінійно за інерцією або зберігає стан спокою.

## 2.6 Імпульс системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок, тобто таку систему, яка складається з  $n$  матеріальних точок.

У загальному випадку механічні системи можна класифікувати за різними ознаками [1,14]. Однією з характеристик механічної системи в цьому випадку є кількість матеріальних точок. За числом точок розрізняють одночастинкові і багаточастинкові механічні системи. Для одночастинкової системи другий закон Ньютона має вигляд (2.10):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.12)$$

де в даному випадку  $\mathbf{F}$  – результуюча діюча сила з боку тіл оточення. Якщо число навколишніх тіл – джерел сили – більше одного, то необхідно використати принцип незалежності взаємодії. У багаточастинкових системах кожна матеріальна точка системи може зазнати дію як з боку інших матеріальних точок системи, так і тіл, що не входять в систему. Таким чином, матеріальна точка, що розглядається, перебуває під впливом внутрішніх і зовнішніх сил. Тоді сила  $\mathbf{F}_i$ , що діє на  $i$ -ту точку, може бути представлена у вигляді:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij}, \quad (2.13)$$

де  $\mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – зовнішні сили, що діють на точку;  $\sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij}$  – результат дії на точку усіх інших точок даної системи. Умова  $i \neq j$  означає, що сама на себе точка не діє.

Другий закон Ньютона для  $i$ -ої матеріальної точки в цьому випадку

матиме вигляд:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.14)$$

Або

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.15)$$

Таке рівняння можна скласти для кожної з точок системи.

Імпульс системи точок визначимо як векторну суму імпульсів окремих складових її частинок:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \quad (2.16)$$

Зміну імпульсу системи можна записати таким чином:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.17)$$

Подвійна сума в правій частині (2.17) – сума усіх діючих внутрішніх сил. За третім законом Ньютона сили взаємодії між частинками системи попарно однакові по модулю і протилежно спрямовані:

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \quad (2.18)$$

Тому результуюча сила в кожній парі взаємодії дорівнює нулю, і внутрішні сили не можуть змінити імпульс системи точок, тому:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{ex}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}, \quad (2.19)$$

де  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$  – результуюча усіх зовнішніх сил, що діють на частинки системи.

Отже, похідна за часом сумарного імпульсу системи частинок дорівнює векторній сумі усіх зовнішніх сил, що діють на частинки системи. Це рівняння по виду співпадає з аналогічним рівнянням для матеріальної точки, і у разі системи точок її імпульс розподілений між усіма частинами даної системи.



Як і у разі однієї точки

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt, \quad (2.20)$$

тобто зміна імпульсу системи точок за проміжок часу  $\Delta t = t - t_0$  дорівнює імпульсу результуючої усіх зовнішніх сил, діючих на систему, за той же проміжок часу.

## 2.7 Закон збереження імпульсу

Механічні системи розділяються на замкнуті (ізолювані) і незамкнуті.

Точку, або систему матеріальних точок називають ізолюваною (замкнутою), якщо:

- а) точка (система точок) досить віддалена (віддалені) від інших точок так, що ті практично не чинять ніякої дії на дану точку або систему;
- б) якщо на точку або систему точок не діють зовнішні сили.

У Всесвіті не може бути ізолюваних в абсолютному сенсі систем, оскільки усі тіла взаємозв'язані силами притягання. Проте, якщо система матеріальних точок досить віддалена від масивних небесних тіл, вона поводить як ізолювана система [2]. Тому ізолюваною системою вважатимемо таку, у якій сума усіх зовнішніх сил, що діють на точку або систему точок, дорівнює нулю. Отже, якщо  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = 0$ , то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const}. \quad (2.21)$$

Звідси випливає закон збереження імпульсу для замкнутої системи матеріальних точок:

$$\mathbf{F}^{\text{ex}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const}, \quad (2.22)$$

тобто сумарний імпульс замкнутої системи матеріальних точок

залишається постійним. Імпульси окремих частинок системи можуть змінюватися, проте ці зміни відбуваються так, що приріст імпульсу однієї частини системи дорівнює спаданню імпульсу іншої частини системи. Таким чином, *імпульс ізольованої системи матеріальних точок не змінюється при будь-яких процесах усередині системи* [22].

Може статися так, що  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z \neq 0$ . Тоді

$$\frac{dP_x}{dt} = 0, \quad \frac{dP_y}{dt} = 0, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z \neq 0,$$

що означає, що по окремих напрямках імпульс зберігається і в цих напрямках система точок поводить себе як ізольована система. Але повний імпульс системи не зберігається, зберігається лише проекція на окремий напрям.

Чи може імпульс зберігатися у незамкнутій системі точок? Може, за умови, що сума усіх зовнішніх сил дорівнює нулю,  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}^{\text{ex}} = 0$ .

Розглянемо приклад [6]

Платформа із зброєю рухається з постійною швидкістю  $V_1$  по горизонтальній поверхні без тертя. У деякому моменті часу здійснюється постріл зі зброї у бік руху платформи, швидкість снаряда відносно платформи дорівнює  $u$  (рис. 2.7). Маса платформи без снаряда  $M$ , маса снаряда  $m$ . Визначити швидкість платформи  $V_2$  відразу після пострілу.

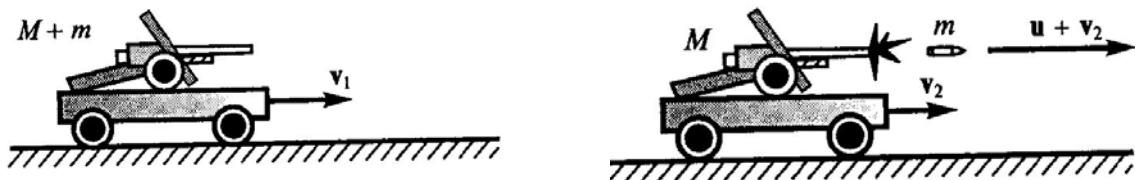


Рис. 2.7. До закону збереження імпульсу

У системі відліку, пов'язаній з горизонтальною поверхнею, імпульс системи снаряд-платформа зберігається, хоча система не замкнута, оскільки знаходиться в полі сили тяжіння. Рівняння закону збереження

імпульсу у напрямі руху платформи може бути написано в такому вигляді:

$$(M + m)V_1 = m(V_2 + u) + MV_2.$$

Звідси, розв'язуючи це рівняння відносно  $V_2$ , отримуємо:

$$V_2 = \frac{(M + m)V_1 - mu}{M + m}.$$

Звісно, той же результат може бути отриманий в іншій ІСВ, наприклад, що рухається зі швидкістю  $V_1$ , що показує, що імпульс зберігається в усіх ІСВ відповідно до принципу Галілея.

Є ще ситуація, в якій може бути застосований закон збереження імпульсу. Це випадок, коли початкові і кінцеві стани відокремлені один від одного малим проміжком часу (постріл, вибух, удар), а внутрішні сили значно більше зовнішніх [3, 5]. За таких умов імпульс зовнішньої сили (сили тяжіння, реакції опори, тертя) не може помітно змінити імпульс системи тіл за даний проміжок часу, і ним можна нехтувати. Це, наприклад, стосується розриву снаряда, коли прирівнюється імпульс снаряда безпосередньо перед розривом і сумарний імпульс осколків після розриву: імпульс зовнішніх сил незначний зважаючи на малий час розриву.

## 2.8 Центр мас. Теорема про рух центру мас

У нерелятивістській механіці імпульс  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$  системи матеріальних точок дорівнює імпульсу однієї матеріальної точки з масою, рівній сумарній масі частинок, що рухаються із швидкістю центру мас системи. Радіус-вектор  $\mathbf{R}_C$ , що задає положення центру мас, виражається через радіус-вектори  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  окремих матеріальних точок системи таким чином:

$$\mathbf{R}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i. \quad (2.23)$$

Центр мас системи – уявна точка. Центр мас системи точок співпадає з її центром тяжіння в однорідному полі тяжіння. Точка центру мас має масу

усієї системи точок, а положення її визначається

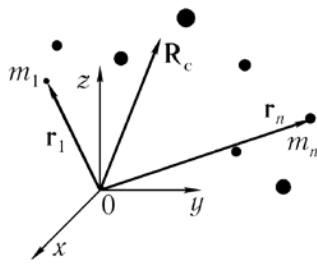
радіус-вектором  $\mathbf{R}_C$ . Точку центру мас називають

ще центром інерції (рис. 2.8). Для тіла з

безперервним розподілом щільності  $\rho(\mathbf{r})$  його

речовини положення центру мас може бути

знайдене в (2.23) інтегруванням [14]:



**Рис. 2.8. Радіус-вектор центру мас системи матеріальних точок**

$$\mathbf{R}_C = \left( \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dv \right) / \int_V (\rho(\mathbf{r}) dv).$$

Величина  $\mathbf{V}_C = \frac{d\mathbf{R}_C}{dt}$  – швидкість руху цієї точки:

$$\dot{\mathbf{R}}_C = \mathbf{V}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i. \quad (2.24)$$

Звідси  $M \dot{\mathbf{R}}_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$ , тобто імпульс системи точок дорівнює добутку

маси системи точок на швидкість її центру мас:

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}_C. \quad (2.25)$$

Підставляючи цей вираз в закон зміни імпульсу системи точок (2.19), отримуємо:

$$M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ex}}, \quad (2.26)$$

де  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$  – сума усіх зовнішніх сил, прикладених до системи матеріальних точок. Отримане рівняння записане відносно лабораторної системи відліку в стані спокою. Згідно цього співвідношення, **центр мас системи точок**

*рухається так, як рухалася б матеріальна точка з масою, рівною  $M$  під дією прикладених до неї усіх зовнішніх сил.* Це твердження називають теоремою про рух центру мас [6, 14]. Прискорення центру мас не залежить від того, до яких конкретно точок системи прикладені зовнішні сили.

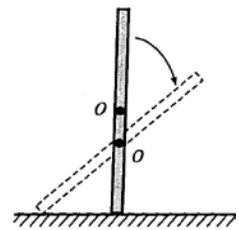
Якщо  $\mathbf{F}^{ex} = 0$ , то  $M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = 0$ ,  $\mathbf{V}_C = \text{const}$  – маємо замкнуту систему точок

в ІСВ, тобто центр мас замкнутої системи матеріальних точок рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться в стані спокою.

Отримані рівняння за формою співпадають з основними рівняннями динаміки матеріальної точки і є його природним узагальненням на систему точок.

### **Приклад [6]**

Тонкий стержень, що спирається на абсолютно гладку горизонтальну поверхню, падає під дією сили тяжіння так, що його центр мас увесь час залишається на одній вертикалі (рис. 2.9). В цьому випадку система замкнута в горизонтальному напрямі. Оскільки тертя немає, то немає сил, які могли б змістити центр мас стержня вліво або управо.



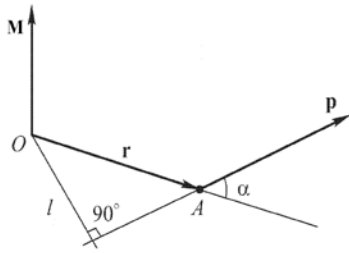
**Рис. 2.9.**  
**Падіння стержня**  
**на абсолютно**  
**гладкій поверхні**

## **2.9 Момент імпульсу. Момент сили**

### **2.9.1 Рівняння моментів. Імпульс моменту сили**

Момент імпульсу (момент кількості руху) матеріальної точки (частинки) з масою  $m$  відносно будь-якої нерухомої точки  $O$  (не обов'язково початку координат) визначають як векторний добуток радіус-вектора частинки  $\mathbf{r}$  на її імпульс  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]. \quad (2.27)$$



**Рис. 2.10.** До визначення моменту імпульсу частинки відносно нерухомої точки  $O$

$\mathbf{r}$  і  $\mathbf{p}$  привести до одного початку і ручку буравчика повертати найкоротшим шляхом від  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{p}$ , то поступальний хід буравчика вкаже напрям вектора  $\mathbf{M}$  (рис. 2.10).

Модуль вектора  $\mathbf{M}$  рівний:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{p}| \sin \alpha, \quad (2.28)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\mathbf{r}$  і  $\mathbf{p}$ . Добуток  $|\mathbf{r}| \sin \alpha = l$  називають плечем імпульсу. Плече імпульсу – найкоротша відстань від точки  $O$  до лінії, уздовж якої спрямований вектор імпульсу.

Для того, щоб визначити, яка фізична величина відповідає за зміну вектора  $\mathbf{M}$ , обчислимо похідну за часом від  $\mathbf{M}$ :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{p} \right] + \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = [\mathbf{r}\mathbf{F}] = \mathbf{N}. \quad (2.29)$$

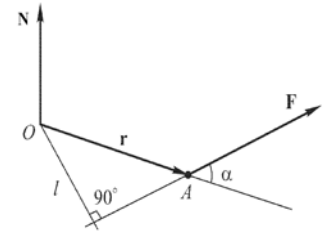
Видно, що перший доданок в (2.29) перетворюється на нуль, оскільки вектори  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$  і  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  колінеарні. У другому доданку згідно з другим

законом Ньютона  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  – рівнодійна усіх сил, прикладених до частки.

Таким чином

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (2.30)$$

Вектор  $\mathbf{N}$  називають моментом сили, прикладеним до точки або відносно



**Рис. 2.11.** Момент сили відносно нерухомої точки  $O$

точки  $O$  (рис. 2.11). Напрямок і величину вектора  $\mathbf{N}$  визначають аналогічно тому, як це було зроблено для вектора  $\mathbf{M}$ . Модуль вектора  $\mathbf{N}$

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \alpha = l |\mathbf{F}|, \quad (2.31)$$

де  $l = |\mathbf{r}| \sin \alpha$  – плече вектора  $\mathbf{F}$  відносно точки  $O$ , тобто довжина перпендикуляра, опущеного з точки  $O$  на лінію дії сили.

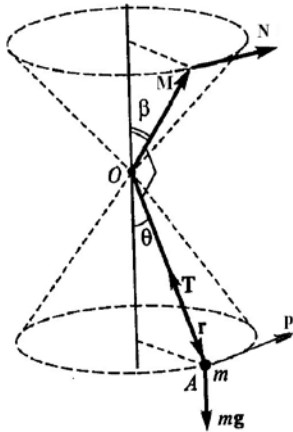
Таким чином, похідна за часом від моменту імпульсу частинки відносно деякої точки  $O$  вибраної нерухомої системи координат дорівнює моменту рівнодійної усіх сил  $\mathbf{N}$  відносно точки  $O$ , прикладених до частинки:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (2.32)$$

Це рівняння називають **рівнянням моментів**. За допомогою рівняння моментів зручно аналізувати обертальний рух.

### Приклад [6]

Невелике тіло масою  $m$ , підвішене на легкій невагомій нитці  $OA$ ,



**Рис. 2.12. Рух моменту імпульсу під дією моменту сили тяжіння**

обертається навколо вертикальної осі так, що кут  $\theta$  між віссю і ниткою залишається сталим (рис. 2.12). В такому випадку вектор моменту імпульсу  $\mathbf{M}$  відносно точки  $O$  переміщується по конічній поверхні з кутом розхилу  $\beta = \pi/2 - \theta$ ,  $\mathbf{M} \perp \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{M} \perp \mathbf{p}$ .

Зміна вектора  $\mathbf{M}$  у напрямі обумовлена тільки наявністю моменту сили тяжіння  $\mathbf{N} = [\mathbf{r} m\mathbf{g}]$  відносно точки  $O$ ; момент сили натягу нитки  $\mathbf{T}$  відносно точки  $O$  дорівнює нулю, оскільки  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{r}$  – колінеарні вектори. Отже, проекція вектора  $\mathbf{M}$  на вісь обертання, величина  $M_z$  – стала величина ( $M_z = \text{const}$ ), оскільки вектор  $\mathbf{N}$  перпендикулярний осі  $z$  і тому проекція  $N_z = 0$ .

Інтегруючи (2.32), можна визначити приріст моменту імпульсу

частинки за скінченний проміжок часу  $\Delta t = t - t_0$ :

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{N}(t) dt. \quad (2.33)$$

Величину під інтегралом в (2.33) називають імпульсом моменту сили за проміжок часу  $\Delta t$ . Таким чином, приріст моменту імпульсу матеріальної точки за деякий скінченний проміжок часу дорівнює імпульсу моменту сили за цей же час.

З рівняння моментів (2.32) виходить, що, якщо  $\mathbf{N} = 0$ , то  $\mathbf{M} = \text{const}$ : якщо відносно деякої точки  $O$  момент усіх сил, що діють на матеріальну точку, дорівнює нулю, то момент імпульсу частинки відносно цієї ж точки зберігається.

Момент сил характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої він береться. Якщо тіло може обертатися відносно точки  $O$  довільним чином, то під дією сили воно обернеться навколо осі, співпадаючої з напрямом моменту сили відносно цієї точки.

## 2.9.2 Момент імпульсу і момент сили відносно осі

Моментом імпульсу відносно осі називають проекцію на цю вісь вектора  $\mathbf{M}$  моменту імпульсу, визначеного відносно точки  $O$ , що знаходиться на цій осі. Аналогічним чином визначають поняття моменту сили відносно осі (рис. 2.13). На відміну від моменту імпульсу і моменту сил відносно точки, проекція цих величин на яку-небудь вісь не є вектором. Проекції моменту імпульсу і моменту

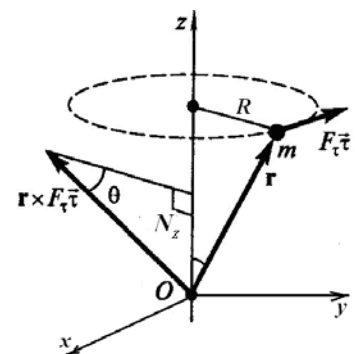


Рис. 2.13. Проекція  $N_z$  моменту сили на вісь  $z$

сил на вісь – це скалярні величини. Записавши рівняння моментів  $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}$



в проекціях вісь  $z$ , отримаємо:

$$\frac{dM_z}{dt} = N_z,$$

тобто, похідна за часом від моменту імпульсу частинки відносно осі  $Oz$  дорівнює моменту сили відносно цієї ж осі.

Якщо  $N_z = 0$ , то  $M_z = \text{const}$ . Сам вектор  $\mathbf{M}$  може змінюватися. Так, для випадку тіла на нитці, розглянутого вище (рис. 2.12), проекція моменту сили тяжіння  $m\mathbf{g}$  на вісь  $Oz$  дорівнює нулю, тому проекція вектора  $\mathbf{M}$  на вісь  $Oz$ ,  $M_z$ , зберігається.

Момент сили відносно осі характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї осі.

### 2.9.3 Момент імпульсу системи точок

Момент імпульсу системи матеріальних точок визначають, як векторну суму моментів імпульсу складових її частинок:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i, \quad (2.34)$$

де кожна з  $\mathbf{M}_i$  визначена відносно однієї і тієї ж точки  $O$  заданої системи відліку. Таким чином, сумарний момент імпульсу – величина адитивна і складається з моментів імпульсів окремих складових незалежно від того, взаємодіють точки чи ні.

Обчислимо похідну за часом від (2.34):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i = \mathbf{N}, \quad (2.35)$$

де  $\mathbf{N}$  – сумарний момент усіх сил, що діють на систему частинок, який складається з сумарних моментів сил, що діють на окрему точку:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i.$$

За аналогією з тим, як був отриманий закон зміни імпульсу системи частинок, представимо кожний  $\mathbf{N}_i$  у вигляді суми моментів імпульсу зовнішніх і внутрішніх сил [1, 6, 22]:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{N}_{ij}.$$

Насправді, як виходить з (2.13) для окремої  $i$ -ої точки маємо:

$$[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = \left[ \mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} \right] = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] + \sum_{i \neq j} [\mathbf{r}_i \mathbf{f}_{ij}] = \mathbf{N}_i^{\text{ex}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{N}_{ij} = \mathbf{N}_i.$$

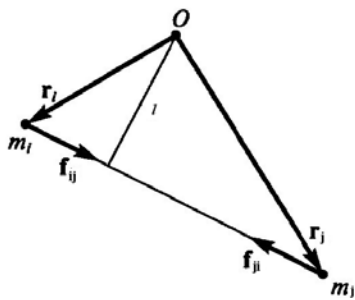
Тоді

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^{\text{ex}} + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} \mathbf{N}_{ij} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} [\mathbf{r}_i \mathbf{f}_{ij}].$$

Таким чином отримуємо, що

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} [\mathbf{r}_i \mathbf{f}_{ij}]. \quad (2.36)$$

За третім законом Ньютона, внутрішні сили взаємодії між частинками системи попарно дорівнюють один одному і спрямовані уздовж однієї і тієї



**Рис. 2.14. Моменти внутрішніх сил системи частинок**

ж прямої в протилежні сторони, тобто мають одне і те ж плече  $l$  відносно будь-якої точки  $O$  (рис. 2.14):

$$[\mathbf{r}_i \mathbf{f}_{ij}] - [\mathbf{r}_j \mathbf{f}_{ji}] = [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{f}_{ij}] = [\mathbf{r}_{ij} \mathbf{f}_{ij}] = 0,$$

оскільки  $\mathbf{r}_{ij} \uparrow \uparrow \mathbf{f}_{ij}$ , і тому  $[\mathbf{r}_i \mathbf{f}_{ij}] = -[\mathbf{r}_j \mathbf{f}_{ji}]$ . Отже,

подвійна сума в (2.36), що є сумарним моментом внутрішніх сил системи точок, перетворюється на нуль. Таким чином, приходимо до висновку, що момент імпульсу системи матеріальних точок може змінитися тільки під дією моменту зовнішніх

сил:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^{\text{ex}} = \mathbf{N}^{\text{ex}}. \quad (2.37)$$

Тут  $\mathbf{N}^{\text{ex}}$  – сумарний момент усіх зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи. При цьому вектори  $\mathbf{M}$  і  $\mathbf{N}$  визначені відносно однієї і тієї ж точки  $O$  заданої системи відліку.

Як і у випадку однієї частинки, звідси витікає, що приріст моменту імпульсу системи частинок за скінченний проміжок часу є

$$\Delta\mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{N}(t) dt.$$

тобто дорівнює імпульсу сумарного моменту усіх зовнішніх сил за проміжок часу  $\Delta t$ .

#### 2.9.4 Закон збереження моменту імпульсу для системи точок

Якщо відносно деякої точки заданої системи відліку сумарний момент зовнішніх сил в (2.37) перетворюється на нуль,  $\mathbf{N}^{\text{ex}} = 0$ , то  $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0$  і  $\mathbf{M} = \text{const}$ ,  $\mathbf{M}(t_1) = \mathbf{M}(t_2)$ , тобто момент імпульсу системи частинок відносно цієї точки з часом не змінюється. Таким чином, момент імпульсу замкнутої ізольованої системи частинок зберігається відносно будь-якої точки даної ІСВ. Однак, моменти імпульсу окремих частинок замкнутої системи можуть змінюватися в часі, але приріст моменту імпульсу окремих частинок дорівнює спаду моменту імпульсу інших частинок. Відносно закону збереження моменту імпульсу відзначимо таке [6, 10, 8].

1. Якщо система замкнута, тобто усі зовнішні сили урівноважені, це не означає, що  $\mathbf{M} = \text{const}$ , оскільки в цьому випадку при дії пари сил  $\mathbf{N} \neq 0$ . Під парою сил розумітимемо сукупність двох рівних по модулю, але

протилежних за напрямом сил  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , лінія дії яких рознесена в просторі. Ці сили не діють уздовж однієї прямої, тобто мають різні плечі:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_2] = [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{F}_2] = [\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{F}_2],$$

де  $\mathbf{r}_{1,2}$  – радіус-вектор, спрямований від точки 1 до точки 2. Момент пари сил не залежить від вибору точки  $O$ . Він однаковий відносно будь-якої точки. Вектор  $\mathbf{N}$  перпендикулярний площині, в якій лежать сили.

2. При русі в полі центральних сил момент імпульсу відносно силового центру сталий, хоча система «силовий центр – частка» не замкнута.

3. У незамкнених систем може зберігатися не сам вектор  $\mathbf{M}$ , а його проекція на деяку вісь  $Oz$ . Так буде тоді, коли проекція  $\mathbf{N}$  на цю вісь дорівнює нулю. Насправді, нехай

$$\frac{dM_z}{dt} = N_z.$$

Тоді, якщо  $N_z = 0$ ,  $\frac{dM_z}{dt} = 0$ ,  $M_z = \text{const}$ .

### 2.9.5 Перетворення моменту імпульсу і моменту сили

Розглянемо момент імпульсу системи точок. Момент імпульсу, як векторна величина, залежить від вибору точки  $O$ , відносно якої його визначають. Коли змінюється положення цієї точки відносно вибраної системи координат, момент імпульсу змінюється.

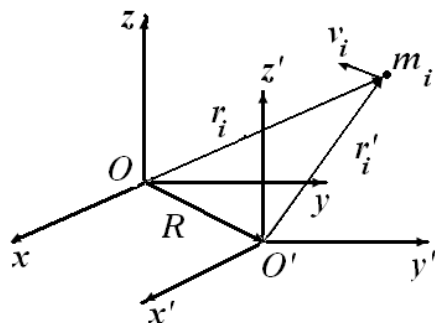


Рис. 2.15. До перетворення моменту імпульсу і моменту сил системи точок

Нехай дана система точок з імпульсами  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ . Визначимо, як пов'язані між собою моменти імпульсу системи частинок відносно двох різних нерухомих

точок  $O$  і  $O'$  в просторі, тобто як зміниться величина моменту імпульсу, якщо початок системи координат перенести з точки  $O$  в точку  $O'$ . Нехай в точці  $O$  знаходиться початок системи координат з осями  $(x, y, z)$ , в точці  $O'$  – початок системи координат  $(x', y', z')$  (рис. 2.15). Осі координат обох систем виберемо паралельними одна відносно другої. Радіуси-вектори  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i$  задають положення точки масою  $m_i$  відносно точок  $O$  і  $O'$  відповідно, радіус-вектор  $\mathbf{R}$  задає положення точки  $O'$  відносно точки  $O$ . У будь-який момент часу

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i.$$

Тоді момент імпульсу системи частинок відносно точки  $O$  є:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{R} \mathbf{p}_i] + \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}_i] = \\ &= \left[ \mathbf{R} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right] + \mathbf{M}'_{O'} = [\mathbf{R} \mathbf{P}] + \mathbf{M}'_{O'}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Таким чином,

$$\mathbf{M}_O = [\mathbf{R} \mathbf{P}] + \mathbf{M}'_{O'}, \quad (2.39)$$

де  $[\mathbf{R} \mathbf{P}]$  – момент імпульсу системи матеріальних точок як цілого відносно

точки  $O$ ;  $\mathbf{M}'_{O'} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}_i]$  – момент імпульсу системи точок відносно точки

$O'$ . Звідси виходить, що при перенесенні початку системи координат з нерухомої точки  $O$  в нерухому точку  $O'$ , віддалену від точки  $O$  на відстані  $\mathbf{R}$ , момент імпульсу системи матеріальних точок відносно точки  $O$  складається з моменту імпульсу системи матеріальних точок як цілого відносно точки  $O$  і сумарного моменту імпульсу точок відносно точки  $O'$ .

З отриманого співвідношення виходить, що, якщо повний імпульс системи точок  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = 0$ , то  $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_{O'}$  – момент імпульсу не залежить

від вибору точки, відносно якої він обчислюється.

Якщо  $\mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – результуюча усіх зовнішніх сил, прикладених до  $i$ -тої точки, то сумарний момент усіх сил відносно точки  $O$  буде рівний:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_O^{\text{ex}} &= \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{R} \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] + \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] = \\ &= [\mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{ex}}] + \mathbf{N}_{O'}^{\text{ex}}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

де  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – сума усіх зовнішніх сил, що діють на усі точки системи;

$[\mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{ex}}]$  – сумарний момент усіх зовнішніх сил системи точок відносно точки  $O$ ;  $\mathbf{N}_{O'}^{\text{ex}} = \sum_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}]$  – сумарний момент зовнішніх сил відносно

точки  $O'$ . При  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = 0$   $\mathbf{N}_O^{\text{ex}} = \mathbf{N}_{O'}^{\text{ex}}$ , і сумарний момент зовнішніх сил відносно точки  $O$  і точки  $O'$  співпадає, тобто не залежить від вибору точки  $O$ .

## 2.9.6 Момент імпульсу відносно рухомого початку координат

Узагальнимо отриманий результат і виведемо формулу, що зв'язує значення моменту імпульсу в двох різних інерціальних системах відліку  $K$  і  $K'$ , одна з яких рухається відносно іншої з постійною швидкістю. Нехай  $\mathbf{R}$  – радіус-вектор, що зв'язує обидва початки координат, тобто точки  $O$  і  $O'$ . Для матеріальної точки  $m_i$  маємо, як і у попередньому випадку в підрозділі 2.9.5, у будь-який момент часу (рис. 2.16):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i;$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i.$$

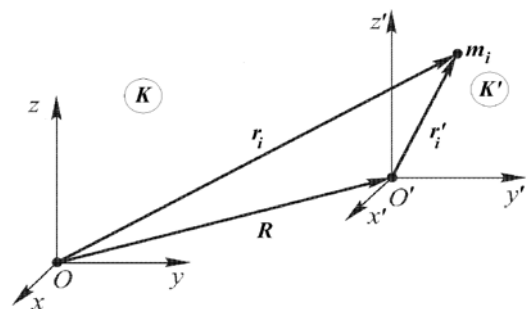


Рис. 2.16. До перетворення моменту імпульсу відносно ІСВ, що рухається

Для моменту імпульсу відносно точки  $O$  отримаємо вираз:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_O &= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \mathbf{r}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i] = \\
&= \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}] + \left[ \mathbf{R} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right] + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \dot{\mathbf{r}}'_i] + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \dot{\mathbf{R}}] = \\
&= [\mathbf{R} \mathbf{P}] + \mathbf{M}'_{O'} + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{R} \dot{\mathbf{r}}'_i] + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \dot{\mathbf{R}}],
\end{aligned}$$

де  $[\mathbf{R} \mathbf{P}] = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}] = M [\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}]$  – момент імпульсу системи точок

відносно точки  $O$  лабораторної системи відліку  $(x, y, z)$ ;

$\mathbf{M}'_{O'} = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \dot{\mathbf{r}}'_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}'_i]$  – сумарний момент імпульсу частинок відносно

точки  $O'$  системи відліку  $K'$ . Інші два доданки пов'язані з векторними

добутками векторів  $\mathbf{R}, \sum_{i=1}^n \mathbf{p}'_i, \dot{\mathbf{R}}$ . Цей вираз є найбільш загальним. Для

певного виду задач, особливо динаміки твердого тіла, зручно помістити початок рухомої системи відліку  $O'$  в точку центру мас системи точок. В

цьому випадку вираз спрощується, оскільки  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0, \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0$ .

Насправді, в системі  $K'$  положення радіус-вектора точки центру мас системи точок відносно точки  $O'$ , згідно (2.23)

$$\mathbf{R}'_{C_{O'}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}{m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i.$$

Якщо точка  $O'$  розташована в центрі мас системи точок, то  $\mathbf{R}'_{C_{O'}} = 0$ , і, отже

$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0, \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0$ . З урахуванням цього і отримуємо по аналогії з

(2.39):

$$\mathbf{M}_O = [\mathbf{R} \mathbf{P}] + \mathbf{M}'_{O'}, \quad (2.41)$$

де  $\mathbf{M}'_{O'} = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \dot{\mathbf{r}}'_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}'_i]$  – сумарний момент імпульсу точок відносно

точки  $O'$  центру мас;  $\mathbf{P} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$  – імпульс системи точок як цілого в лабораторній системі відліку  $K$ .

Визначимо момент імпульсу системи точок відносно його центру мас (відносний момент імпульсу) як

$$\mathbf{M}'_{O'} = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \dot{\mathbf{r}}'_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}'_i], \quad (2.42)$$

де  $\mathbf{p}'_i = m_i \mathbf{v}'_i$ , а  $\mathbf{r}'_i, \mathbf{v}'_i$  – радіус-вектор і швидкість  $i$ -тої точки відповідно відносно центру мас. Звідси отримуємо (2.41) відносно нерухомої лабораторної системи  $K$ . При визначенні моменту імпульсу відносно його центру мас (величини  $\mathbf{M}'_{O'}$ ) необхідно враховувати відносні швидкості усіх точок системи матеріальних точок відносно центру мас, вважаючи його нерухомим. Із співвідношення (2.41) виходить, що, якщо повний імпульс системи точок  $\mathbf{P} = 0$ , то її момент імпульсу не залежить від вибору точки, відносно якої його визначають, тобто  $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_{O'}$ .

Момент імпульсу  $\mathbf{M}'_{O'}$  називають власним моментом імпульсу системи матеріальних точок, якщо точка  $O'$  – центр мас системи точок. Звідси витікає, що момент імпульсу системи точок  $\mathbf{M}_O$  відносно точки  $O$  нерухомої системи відліку складається з її власного моменту імпульсу  $\mathbf{M}'_{O'}$  і моменту  $[\mathbf{R} \mathbf{P}]$ , обумовленого рухом системи точок як цілого.

**Приклад** [6]. Куля рухається по круговій орбіті відносно центру  $O$  (рис. 2.17). Якщо вона рухається без обертання, власний момент імпульсу дорівнює нулю, і вона має лише момент імпульсу як цілого відносно точки  $O$ . Якщо вона котиться, тобто обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ , то її момент імпульсу складається з моменту імпульсу поступального руху як цілого і моменту імпульсу обертального руху



відносно точки  $O'$  – власного моменту імпульсу, тобто  $\mathbf{M} = \mathbf{M}'_{O'} + [\mathbf{R}\mathbf{P}]$ ;  $\mathbf{P} = m\mathbf{V}_0$ , де  $\mathbf{V}_0$  – лінійна швидкість кульки при русі по орбіті навколо точки  $O$ .

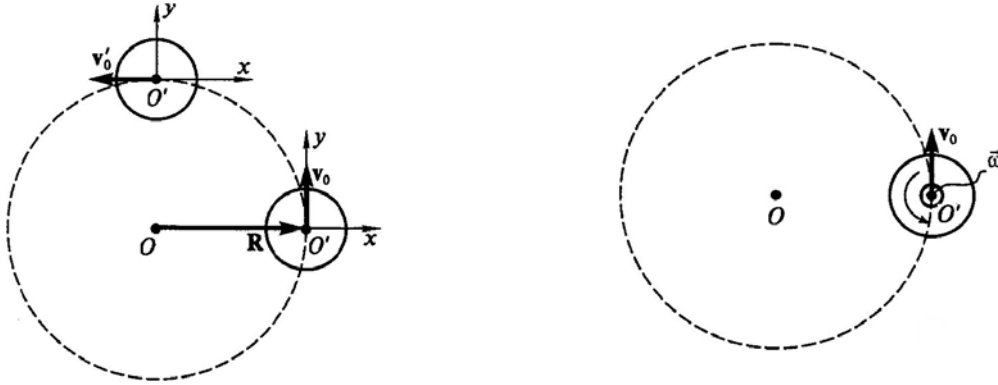


Рис. 2. 17. Рух кулі по орбіті без обертання (ліворуч) і з обертанням (праворуч)

### 2.9.7 Система центру мас.

#### Момент сил відносно рухомого початку

Система відліку, що жорстко пов'язана з центром мас і переміщається поступально по відношенню до ІСВ, називають системою центру мас або С-системою. Її характерною особливістю є те, що повний (сумарний) імпульс системи матеріальних точок в ній завжди дорівнює нулю

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}_C = 0. \quad (2.43)$$

Тобто, будь-яка система точок, як ціле, нерухома у своїй С-системі. Для замкнутої системи точок її С-система є інерціальною системою відліку (ІСВ), для не замкнутої в загальному випадку – неінерціальною системою відліку (НСВ). З формули (2.41) виходить, що якщо  $\mathbf{P} = 0$ , тобто центр мас системи точок нерухомий відносно точки  $O$ , то її момент імпульсу відносно цієї точки співпадає з власним моментом імпульсу  $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_{O'}$  і не залежить від вибору точки  $O$ , відносно якої розраховується. Це теж є відмітною ознакою С-системи: в С-системі момент імпульсу не залежить від вибору точки, відносно якої його визначають. У іншому випадку, при

$\mathbf{M}'_{O'} = 0$  (см 2.41), момент імпульсу системи точок відносно деякої точки визначається тільки моментом імпульсу, пов'язаним з рухом системи як цілого. Для твердого тіла, наприклад, це поступальний рух.

Обчислимо похідну за часом від обох частин (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \frac{d}{dt}[\mathbf{R}\mathbf{P}] + \frac{d\mathbf{M}'_{O'}}{dt} = \\ &= \left[ \frac{d\mathbf{R}}{dt} \mathbf{P} \right] + \left[ \mathbf{R} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{r}'_i m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}'_i}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Перший доданок в останньому співвідношенні дорівнює нулю, оскільки вектори  $\dot{\mathbf{R}}$ ,  $M\mathbf{V} = M\dot{\mathbf{R}}_C$  колінеарні. Другий доданок – це момент усіх зовнішніх сил, прикладених до системи матеріальних точок:

$$\left[ \mathbf{R} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right] = \left[ \mathbf{R} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{R}} \right] = \left[ \mathbf{R} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{ex}} \right] = \left[ \mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{ex}} \right],$$

оскільки  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$ , а  $\mathbf{R}$  в даному випадку є радіус-вектор центру мас системи точок відносно точки  $O$  нерухомої системи відліку. Третій доданок також перетворюється на нуль, оскільки є векторним добутком двох колінеарних векторів  $\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}'_i$ . Четвертий доданок

$$\sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{r}'_i m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}'_i}{dt} \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}} \right] = \mathbf{N}'_{O'} - \text{це сума моментів усіх зовнішніх сил}$$

відносно центру мас системи точок. Таким чином, остаточно отримуємо:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}^{\text{ex}} = \left[ \mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{ex}} \right] + \mathbf{N}'_{O'}, \quad (2.44)$$

де  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – результуюча усіх зовнішніх сил, що діють на систему матеріальних точок, як цілого і прикладених до центру мас системи точок відносно нерухомої системи відліку;

$$\mathbf{N}'_{O'} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}'_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{M}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}} \right] - \text{сума моментів усіх зовнішніх сил}$$

відносно центру мас системи матеріальних точок.

З (2.44) виходить, що, якщо сума усіх зовнішніх сил, прикладених до центру мас системи матеріальних точок  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}} = 0$ , то сумарний момент зовнішніх сил не залежить від вибору точки, відносно якої його визначають:  $\mathbf{N}_O^{\text{ex}} = \mathbf{N}_{O'}^{\text{ex}}$ . Зокрема, це справедливо і для пари сил. Іншим важливим випадком збігу  $\mathbf{N}_O^{\text{ex}}, \mathbf{N}_{O'}^{\text{ex}}$  є рівність нулю повного імпульсу системи точок відносно точки  $O$ :  $\mathbf{P} = 0$ . Оскільки  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ , звідси виходить, що  $\mathbf{P} = \text{const}$ , і це характерне для С-системи, оскільки в С-системі система матеріальних точок знаходиться в стані спокою як ціле: оскільки  $M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ex}}$ , то при  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}} = 0$ , отже  $M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = 0$ . Таким чином, приходимо до висновку: в С-системі сумарний момент усіх зовнішніх сил не залежить від вибору точки  $O$ .

І останнє, ми отримали, що співвідношення (2.44)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}^{\text{ex}}$$

справедливе для сукупності матеріальних точок у будь-якій інерціальній системі відліку. Отже, воно справедливе і в С-системі, оскільки. С-система – ІСВ. Тому

$$\frac{d\mathbf{M}'_{O'}}{dt} = \mathbf{N}'^{\text{ex}}_{O'} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}'^{\text{ex}}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{M}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}], \quad (2.45)$$

де  $\mathbf{N}'^{\text{ex}}_{O'}$  – сумарний момент усіх зовнішніх сил в С-системі. У С-системі величина  $\mathbf{N}'^{\text{ex}}_{O'} = \mathbf{N}'^{\text{ex}}$  не залежить від вибору точки, відносно якої її визначають. Зазвичай такою точкою є точка центру мас системи матеріальних точок.

Таким чином, похідна за часом від власного моменту імпульсу системи

матеріальних точок дорівнює сумарному моменту усіх зовнішніх сил взаємодії відносно центру мас цієї системи часток. Зокрема, якщо  $\mathbf{N}^{\text{ex}} = 0$ , то  $\mathbf{M}' = \text{const}$ , тобто власний момент імпульсу зберігається. У проекціях на вісь  $z$ , що проходить через центр мас, це рівняння має вигляд:

$$\frac{dM'_z}{dt} = N_z^{\text{ex}},$$

де  $N_z^{\text{ex}}$  – сумарний момент зовнішніх сил взаємодії відносно нерухомої в С-системі осі  $z$ , що проходить через центр мас. Якщо  $N_z^{\text{ex}} = 0$ , то величина  $M'_z$  зберігається.

## 2.10 Рух тіл змінної маси

Маса тіла при його русі може змінюватися. Існує безліч явищ, в яких маса тіл при русі змінюється. Тіло може безперервно втрачати яку-небудь долю маси, тобто від нього безперервно відділяються частки речовини, що становлять це тіло. Або навпаки, до нього приєднуються якась частина маси, нові частки. Наприклад: платформа, що навантажується на ходу; рух автомобіля, що поливає вулицю водою; рух вагону, який безперервно уздовж дороги розсипає пісок; рух літака або ракети, що випускають безперервний струмінь газу при згоранні палива. Причому продукти згорання входять в загальну масу літального апарату. У даному випадку руху літального апарату, його переміщення здійснюється за рахунок сил, що виникають в результаті виверження часток маси, що належать тілу. Природно, другий закон Ньютона в тій формі, в якій його зазвичай застосовують, де маса тіла вважається постійною, вже не може дати правильного опису руху такого тіла.

Розглянемо виведення рівняння руху такого тіла на прикладі руху ракети [3]. Нехай ракета рухається в деякій ІСВ по прямій, що задається

вектором  $\mathbf{l}$ . Нехай у момент часу  $t$  швидкість ракети дорівнює  $\mathbf{v}(t)$ , а її маса у цей момент дорівнює  $M(t)$  (рис. 2.18). Припустимо, що швидкість газів, що викидаються ракетою,  $\mathbf{u}$ , не змінюється в часі. Це означає, що ви-

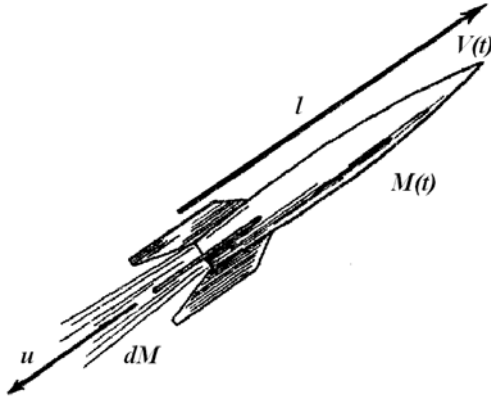


Рис. 2.18. До виведення рівняння руху тіл змінної маси

трата маси за одиницю часу,  $\frac{dM}{dt}$  –

величина стала. Очевидно, що спад маси ракети дорівнює спаду маси згорілого палива. Вважатимемо, що спад маси величина негативна, тобто  $dM < 0$ .

У момент часу  $t + dt$  маса ракети зменшилася і стала  $M + dM$ . Швидкість ракети збільшилася на величину  $dv$  і стала  $v + dv$ . Імпульс ракети у момент

часу  $t$  був  $M(t)v$ , у момент часу  $t + dt$  імпульс став  $(M + dM)(v + dv)$ . Імпульс, який відноситься масою, що відділяється, є  $-dM(v - u)$ . На підставі закону збереження імпульсу уздовж прямої, по якій рухається ракета, для моментів часу  $t$ ,  $t + dt$  отримуємо:

$$(M + dM)(v + dv) - Mv = (dM)(v - u).$$

Після перемножування, приведення подібних членів і нехтуючи величинами другого порядку малості – добутком  $dM dv$  – отримуємо:

$$M dv + u dM = 0.$$

Поділивши на  $dt$ , отримане співвідношення приводимо до виду:

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt}. \quad (2.46)$$

Це рівняння руху ракети за відсутності зовнішніх сил. Введемо величину  $\mu$  витрати палива в одиницю часу

$$\mu = -\frac{dM}{dt}. \quad (2.47)$$

Очевидно, що  $\mu > 0$ , оскільки  $\frac{dM}{dt} < 0$ , оскільки  $dM < 0$ . Ця величина визначає витрату маси в одиницю часу. Тоді у векторному вигляді (2.46) запишеться таким чином:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mu \mathbf{u}, \quad (2.48)$$

оскільки вектори  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  і  $\mathbf{u}$  спрямовані в протилежні напрями. Величину  $\mathbf{F}_T = -\mu \mathbf{u}$  називають реактивною силою або силою тяги ракети. Реактивна сила дорівнює добутку витрати маси  $\mu$  на швидкість відносного руху  $\mathbf{u}$  газів (або частинок, що покидають тіло), що викидаються. Реактивна сила виникає тоді, коли частинкам, що викидаються, надають швидкість  $\mathbf{u}$ . Сила, протидіюча їй, за третім законом Ньютона прикладена до ракети і спрямована убік, протилежний до маси, що викидається. Це і є реактивна сила.

З урахуванням введення реактивної сили рівняння руху ракети (2.48) (або тіла, яке втрачає безперервно свою масу) можна записати таким чином:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_T; \quad \mathbf{F}_T = -\mu \mathbf{u}. \quad (2.49)$$

Останнє рівняння отримане нами за відсутності зовнішніх сил, що діють на тіло. Припустимо тепер, що на ракету (або тіло) діють зовнішня сила (наприклад, сила тяжіння, опору повітря) і інші сили. В цьому випадку розглядати це тіло, як ізольоване, не можна. Необхідно враховувати зміну його імпульсу під дією зовнішніх сил. Розглянемо більш загальний випадок [5, 6], коли потрібно врахувати необхідність приєднання до тіла додаткової маси  $dM' > 0$  за час  $dt$  з відносною швидкістю  $\mathbf{u}'$ . Якщо маса, що викидається, за час  $dt$  є  $dM_B$ , то очевидно, що

$$dM = dM_B + dM'.$$

Визначимо як і раніше  $\mu = -\frac{dM_B}{dt}$ ;  $\mu' = \frac{dM'}{dt}$  – маса, що викидається і приєднувана, в одиницю часу відповідно. Врахуємо, що за наявності зовнішніх сил зміна імпульсу під дією цих сил буде  $Fdt$ . В результаті баланс імпульсу має вигляд:

$$(M + dM)(v + dv) - Mv - (v - u)dM_B - (v + u')dM' = Fdt.$$

Після перемножування, приведення подібних членів, з урахуванням  $dM = dM_B + dM'$ , і нехтуючи величинами другого порядку малості, отримуємо:

$$Mdv = Fdt + u'dM' - udM_B.$$

Розділимо на  $dt$ :

$$M \frac{dv}{dt} = F + u' \frac{dM'}{dt} - u \frac{dM_B}{dt}. \quad (2.50)$$

Врахуємо визначення  $\mu = -\frac{dM_B}{dt}$ ;  $\mu' = \frac{dM'}{dt}$  і перепишемо у векторній формі:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}'\mu' - \mathbf{u}\mu. \quad (2.51)$$

Використовуючи (2.49) для реактивної сили, (2.51) набуває вигляду

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{u}'\mu', \quad (2.52)$$

де

$$M = M(t) = M_0 - \int_0^t \mu dt + \int_0^t \mu' dt \quad (2.53)$$

змінна маса у момент часу  $t$ ;  $M_0$  – початкова маса;  $\mathbf{v}(t)$  – швидкість тіла.

Отримане рівняння (2.51) носить назву рівняння Мещерського, яке описує, зокрема, рух ракет з нерелятивістськими швидкостями у присутності зовнішніх сил. Воно справедливе у будь-якій ІСВ. Під силою  $\mathbf{F}$  слід розуміти результуючу усіх зовнішніх сил, що діють на тіло. З

рівняння виходить, що у разі змінної маси

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq \frac{d(M\mathbf{v})}{dt}.$$

Якщо  $\mu = 0$ , то

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}'\mu'. \quad (2.54)$$

Це рівняння описує випадок руху тіла з приєднанням частинок (космічний пил, наприклад), в якому  $\mathbf{u}'\mu'$  – реактивна сила, що виникає при зіткненні частинок з тілом. У разі, якщо  $\mu' = 0$

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{u}\mu, \quad (2.55)$$

рівняння описує випадок руху тіла з частинками, що відділяються (згорання палива у ракети, наприклад).

Розглянемо окремі випадки використання цього рівняння.

1. При  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} = 0$ . Рівняння набирає вигляду:

$$M(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

де  $M(t)$  – маса тіла в даний момент часу. Це рівняння визначає рух платформи, наприклад, з якої висипається пісок

2. Якщо  $\mathbf{u}' = -\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} = 0$ , або  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}' = 0$ , тобто приєднувана маса нерухома, або відокремлювана маса стає нерухомою в цій системі відліку, рівняння набирає вигляду:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dM}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}.$$

У цьому окремому випадку дія сили  $\mathbf{F}$  визначає зміну імпульсу тіла (наприклад, рух платформи, що навантажується сипким матеріалом з бункера).

3. Розглянемо ще один окремий випадок прямолінійного руху ракети, коли зовнішніми силами можна нехтувати [3]. Вважатимемо, що швидкість



витікання газів постійна. Рівняння Мещерського можна переписати таким чином:

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt},$$

причому, знак мінус в правій частині обумовлений тим, що швидкість газів при прискоренні ракети протилежна швидкості ракети  $v$ . Скоротимо на  $dt$  обидві частини і розділимо змінні:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u}.$$

Під час руху маса ракети змінюється від  $M_0$  – початкової маси – до значення поточної маси  $M$  на момент часу  $t$ , а швидкість змінюється від  $v_0$  до  $v$  у кінці прискорення. Значення цих величин визначають межі інтегрування:

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -\int_{v_0}^v \frac{dv}{u},$$

$$\ln \frac{M}{M_0} = -\frac{v - v_0}{u},$$

або

$$v = v_0 - u \ln \frac{M}{M_0}. \quad (2.56)$$

Вираз (2.56) називають формулою Ціолковського. Вона дає відповідь на питання, як змінюється швидкість ракети при зміні її маси від  $M_0$  до  $M$ . Зміну маси зручно представляти у вигляді:

$$M = M_0 e^{-\frac{v-v_0}{u}}. \quad (2.57)$$

У вигляді (2.57) формула дає відповідь на питання, як змінюється маса ракети при зміні швидкості від  $v_0$  до  $v$ . Якщо прискорення ракети походить із стану спокою, то  $v_0 = 0$ .

## 2.11 Релятивістська динаміка

Вище ми визначили поняття імпульсу матеріальної точки, як добуток маси точки на її швидкість, яке було дано самим Ньютоном, а також визначили імпульс системи матеріальних точок, як суму імпульсів усіх точок системи. Крім того, визначено правило, за яким імпульс системи матеріальних точок зберігається (закон збереження імпульсу): імпульс ізольованої системи матеріальних точок не змінюється при будь-яких процесах, що відбуваються усередині системи.

Для матеріальної точки закон збереження імпульсу означає, що за відсутності зовнішніх сил точка рухається з постійною швидкістю по прямій лінії. Для системи матеріальних точок в нерелятивістському випадку закон стверджує, що центр мас системи точок рухається рівномірно і прямолінійно.

Розглянемо математичну суть механічних законів збереження [23]. Рівняння руху є рівняннями зміни фізичних величин в часі і просторі. Вони описують послідовність ситуацій, через які здійснюється рух. Закони збереження відповідають на питання про те, що саме залишається незмінним у послідовності фізичних ситуацій, що описуються рівнянням руху. Наприклад, одновимірний рух, для якого рівняння Ньютона можна записати у вигляді двох рівнянь:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x; \quad \frac{dx}{dt} = v_x.$$

Задача вважається повністю розв'язаною, якщо відоме положення матеріальної рухомої точки у будь-який момент часу. Тому

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m}; \quad dv_x = \frac{1}{m} F_x dt; \quad \int_{v_0}^{v_x} dv_x = \frac{1}{m} \int_0^t F_x dt.$$

Звідси, знаючи  $v_x = v_x(t)$ , можна інтегрувати і друге рівняння і знайти

$x = x(t)$ . Для достатньо широкого класу сил перше рівняння інтегрується в загальному вигляді і представляється як постійність чисельного значення певної комбінації фізичних величин. Тому в математичному сенсі закони збереження зводяться до перших інтегралів рівняння руху. Таким чином, в нерелятивістському випадку закон збереження імпульсу для замкнутої системи тіл виконується на основі I і II законів Ньютона.

Виходячи з цих міркувань, можна припустити, що закон збереження імпульсу повинен мати місце і при релятивістських швидкостях руху. Дійсно, дослід показує, що для точок, що рухаються з релятивістськими швидкостями, закон збереження імпульсу виконується. Більше того, виходячи із законів збереження імпульсу, які нібито були порушені в деяких процесах радіоактивного розпаду, В. Паулі в 1930 р. припустив, що існує нова елементарна частинка – нейтрино. Експериментально ця частинка була виявлена через 25 років.

Проте, якщо виходити з визначення імпульсу, даного Ньютоном у вигляді

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (2.58)$$

то можна показати, що при релятивістських швидкостях руху закон збереження імпульсу не виконується [4,6,26]. Це можна здійснити на прикладі двох релятивістських частинок, які летять одна назустріч одній з однаковими по модулю швидкостями в системі відліку  $K$  і  $K'$  відповідно. Навіть у разі нецентрального зіткнення (під кутом, швидкості руху спрямовані під кутом до осі координат), в системі відліку  $K$  сума імпульсів по осі  $y$  дорівнює нулю. При переході в  $K'$  систему, яка рухається відносно  $K$  із швидкістю  $V$  уздовж осі  $x$ , для знаходження проекцій швидкостей уздовж осі  $y$  як до, так і після зіткнення, треба використати релятивістське перетворення швидкостей. В результаті виявляється, що

сумарний імпульс частинок після зіткнення відносно осі  $y'$  не дорівнює нулю.

Усе це говорить про те, що, якщо здійснювати перехід з однієї ІСВ в іншу, порушується закон збереження імпульсу, якщо імпульс визначений за виразом (2.58). Тому при релятивістських швидкостях імпульс тіла очевидно, повинен визначатися по-іншому.

### 2.11.1 4-вимірні вектори

У підрозділі 1.17 були визначені чотиривимірні вектори (4-вектори), як вектори, що належать простору СТВ – 4-вимірному псевдо евклідовому простору Мінковського. Рух в цьому просторі – це послідовність подій, що полягають в тому, що точка займає певне місце в просторі в якийсь момент часу, і описує в 4-вимірному просторі деяку лінію, що називається світовою лінією точки. Компоненти 4-вектора в просторі Мінковського визначені таким чином (див. 1.65, 1.66):

$$x_0 = ct; x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; \mathbf{R} = \mathbf{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}(ct, x, y, z) = \mathbf{R}(ct, \mathbf{r}).$$

Тут усі 4 компоненти мають одну і ту ж розмірність. Квадрат довжини 4-вектора є не що інше, як квадрат інтервалу, відлічений від початку системи відліку:

$$R^2 = S^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (2.59)$$

Матриця перетворення при переході з однієї системи відліку  $K'$  в  $K$  має вигляд, даний виразами (1.68), (1.69). Зворотний перехід дається в (1.70). Як було вказано, сенс такого перетворення – це поворот системи координат 4-вимірної системи відліку, при цьому при будь-яких поворотах «довжина» 4-вектора не змінюється, тобто відстань між 2 світовими точками залишається сталою, подібно до того, як в геометрії Евкліда

поворот осей координат залишає незмінним довжину радіус-вектора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Дамо наступне визначення [4,17,20].

Будь-яку 4-компонентну фізичну величину  $\mathbf{A}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ , складові якої при переході з інерціальної системи відліку  $K$  в інерціальну систему відліку  $K'$ , що рухається відносно неї, перетворюються за формулою Лоренца виду:

$$A'_0 = \Gamma(A_0 - \beta A_1); A'_1 = \Gamma(A_1 - \beta A_0); A'_2 = A_2; A'_3 = A_3 \quad (2.60)$$

називатимемо 4-вимірним вектором (4-вектором). Квадрат довжини будь-якого 4-вектора  $\mathbf{A}(A_0, A_1, A_2, A_3)$  не змінюється при перетворенні Лоренца і визначається виразом:

$$A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = \text{inv}. \quad (2.61)$$

Квадрат 4-вектора може бути позитивним, негативним або рівним нулю. Відповідно, 4-вектори називають часово-подібним, просторово-подібним або нульовим (ізотропним, світло-подібним). Компонент  $A_0$  4-вектора називають часовою компонентою, інші – просторовими. При цьому просторові компоненти самі утворюють тривимірні вектори, наприклад  $\mathbf{r}(x,y,z)$ ,  $d\mathbf{r}(dx,dy,dz)$ . Введення поняття 4-вектора дає можливість зручно записати усі закони руху релятивістської динаміки в простій і зрозумілій формі.

### 2.11.2 4-вектор швидкості

Розглянемо точку, що рухається в просторі. У системі відліку  $K$  її переміщення є  $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$ , а швидкість  $\mathbf{v}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ ;  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . У

системі  $K'$ , що рухається відносно  $K$  уздовж осі  $x$  із швидкістю  $V$ , швидкість цієї ж частинки є  $\mathbf{v}'$  з компонентами  $\mathbf{v}'\left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$  і пов'язані з компонентами в системі  $K$  формулами перетворення швидкостей (1.54), (1.55). Узагальнимо ці формули перетворення так, щоб отримати 4-вимірну величину.

Введемо 4-вектор швидкості як похідну 4-радиус-вектора за часом [4,6,26]. Для того, щоб квадрат 4-вектора швидкості був інваріантною величиною, як того вимагає СТВ, треба шукати похідну 4-радиус-вектора за інваріантною величиною, тобто за величиною, що чисельно зберігається при переході  $K \rightarrow K'$ . Таким інваріантом є власний час  $d\tau = dS/c$ . Власний час  $\tau$  – це час в миттєво-супутній системі ІСВ ( $K'$ ), швидкість якої  $V$  в даний момент часу, або за проміжок часу  $dt$ , дорівнює швидкості точки  $v$ . Годинник, що відлічує власний час в цій, миттєво-супутній ІСВ, нерухомий. Для елементарного інтервалу часу  $d\tau$  (власного часу) і рухомої довільним чином точки (не обов'язково рівномірно і прямолінійно), інтервал  $d\tau$  в  $K'$  пов'язаний з інтервалом  $dt$  в системі відліку  $K$  співвідношеннями (1.49) і (1.50):

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v(t)}{c},$$

де  $v = v(t)$  – миттєва швидкість точки, а не системи відліку. Скінченний інтервал власного часу приведений в (1.51)

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt.$$

**4-швидкість** визначимо у вигляді співвідношення

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau}, \quad (2.62)$$

де  $\mathbf{R}$  – 4-радиус-вектор (1.66) з компонентами:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}(ct, x, y, z) = \mathbf{R}(ct, \mathbf{r}).$$

Звідси отримуємо компоненти 4-вектора швидкості:

$$v_i = \frac{dx_i}{d\tau}; \quad i = 0, 1, 2, 3, \text{ тобто,}$$

$$v_0 = \frac{dx_0}{d\tau}; \quad v_1 = \frac{dx_1}{d\tau}; \quad v_2 = \frac{dx_2}{d\tau}; \quad v_3 = \frac{dx_3}{d\tau}. \quad (2.63)$$

Таким чином, 4-вектор швидкості має вигляд:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}\left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}\right) = \mathbf{V}(v_0, v_1, v_2, v_3),$$

де

$$v_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \gamma = c\gamma;$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \gamma = v_x \gamma;$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \gamma = v_y \gamma;$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{dz}{dt} \gamma = v_z \gamma. \quad (2.64)$$

Остаточно в 4-вимірному векторному вигляді отримуємо:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = \mathbf{V}(v_0, v_1, v_2, v_3) = \mathbf{V}(c\gamma, \mathbf{v}\gamma). \quad (2.65)$$

Отриманий 4-вектор називають 4-вимірний вектор швидкості  $\mathbf{V}$  або 4-вектор швидкості. Оскільки компонентам вектора переміщення

$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}(cdt, d\mathbf{r})$  відповідає інваріант  $dS^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$ , де

$d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , а компоненти швидкості – це відношення  $v_i = \frac{dx_i}{d\tau}$ ,

тобто похідна за інваріантним часом, то сума квадратів просторових і часових компонентів має бути також інваріантом перетворення при переході  $K \rightarrow K'$  [15]. Легко виявити, що

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 - \text{inv}. \quad (2.66)$$

Тобто. довжина 4-вектора швидкості дорівнює постійній величині – квадрату швидкості світла. У компонентному вигляді це може бути записано таким чином:

$$v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = c^2. \quad (2.67)$$

При  $v \ll c$  маємо  $\gamma \approx 1$ , і тоді 4-вектор швидкості має компоненти

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(c, v_x, v_y, v_z).$$

Звідси виходить, що навіть якщо тіло нерухоме, нульова компонента 4-швидкості  $v_0 = c \neq 0$ . Сенс цього в тому, що час завжди «плине», і спокою в 4-мірному просторі Мінковського немає.

### 2.11.3 4-вектор енергії-імпульсу

За аналогією з нерелятивістським рівнянням руху (2.10)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F},$$

інваріантним відносно перетворень Галілея, отримаємо рівняння руху релятивістської частинки, інваріантне відносно перетворень Лоренца, але таке, що має такий же вигляд для задоволення принципу відповідності при швидкостях  $v \ll c$ . Для цього побудуємо релятивістський імпульс аналогічно з класичним випадком як добуток інваріантної маси (маси спокою) на 4-вектор швидкості (2.62):

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} = m \frac{d\mathbf{R}}{d\tau}.$$

В цьому випадку компонентами 4-вектора імпульсу  $\mathbf{P}$  будуть мати вигляд:



$$\mathbf{P}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \mathbf{P}(mc\gamma, mv_x\gamma, mv_y\gamma, mv_z\gamma) = \mathbf{P}(mc\gamma, m\mathbf{v}\gamma). \quad (2.68)$$

Отже, тривимірна частина релятивістського імпульсу визначимо як

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\mathbf{v}\gamma. \quad (2.69)$$

При  $v \ll c$  отримуємо класичний імпульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . При цьому маса  $m$  в (2.69) – та ж, що і в класичному імпульсі  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Маса є інваріантною величиною, що зберігає своє значення в усіх ІСВ. У деяких підручниках [1,5,11] релятивістський імпульс записують як в механіці Ньютона  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , але при цьому вводять поняття релятивістської маси

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де  $m_0$  – маса спокою. Видно з введеного виразу, що при наближенні швидкості частинки до швидкості світла маса її зростає до нескінченності. У фізичних міркуваннях оперують величинами, інваріантними відносно усіх систем відліку, такими, як власний час  $\tau$  і маса. Відмінність релятивістського імпульсу  $\mathbf{P} = m\mathbf{V} = m \frac{d\mathbf{R}}{d\tau}$  від Ньютонівського

$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  полягає тільки в заміні часу  $dt$  на  $d\tau$ , тобто на власний час частинки, а не у відмінності маси спокою і релятивістської маси. Це пов'язано з перетворенням Лоренца для часової компоненти, а не із залежністю маси від швидкості, тобто не з перетворенням для маси.

Нульова компонента 4-імпульсу пов'язана з енергією, і його значення буде отримано нижче у відповідному розділі. Саме тому 4-імпульс носить назву 4-вектор енергії-імпульсу.

#### 2.11.4 Релятивістське рівняння руху

Отримаємо рівняння руху – аналог рівняння Ньютона класичної механіки (2.10) виду  $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$ . За аналогією з приведеними вище міркуваннями для отримання такого рівняння в релятивістському випадку використаємо 4-вектори [4,15,26]. Рівняння руху напишемо у вигляді

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{F}, \quad (2.70)$$

де вводиться поняття 4-вектор сили  $\mathbf{F}(f_0, f_1, f_2, f_3)$ . Компоненти 4-вектора сили визначимо як похідні компонент 4-імпульсу за інваріантним часом  $d\tau$ :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{dp_0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(mc\gamma) = \gamma \frac{d}{dt}(mc\gamma); \\ f_i &= \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(mv_i\gamma) = \gamma \frac{d}{dt}(mv_i\gamma), \quad i = x, y, z. \end{aligned} \quad (2.71)$$

У (2.71)  $v_i$  – це компоненти звичайної тривимірної швидкості.

Розглянемо просторову частину рівняння (2.70). У цьому рівнянні до просторових компонент сили відносяться  $f_i = \frac{d}{d\tau}(mv_i\gamma) = \gamma \frac{d}{dt}(mv_i\gamma)$ ,  $i = x, y, z$ . Компоненти 4-сили мають бути пропорційні відповідним компонентам 3-вимірної сили для того, щоб при  $v \ll c$  рівняння (2.70) перейшло в рівняння руху Ньютона (2.10). Для цього вважають (вводять, означають) компоненти 3-вимірної сили  $f_i$  ( $i = x, y, z$ ) як похідні за часом  $\frac{d}{dt}$  від просторової частини 4-імпульсу (3-вимірного імпульсу):

$$f_i = \gamma \frac{d}{dt}(mv_i\gamma) = \gamma F_i, \quad (i = x, y, z), \quad (2.72)$$

де

$$\frac{d}{dt}(mv_i\gamma) = F_i.$$

Виправданням такого припущення є правильність отриманих результатів.

Тепер порівнюючи ці два вирази, а саме

$$\begin{cases} f_i = \gamma \frac{d}{dt}(mv_i\gamma) \\ f_i = \gamma F_i, \end{cases}$$

отримуємо, що

$$\gamma F_i = \gamma \frac{d}{dt}(mv_i\gamma), \quad i = x, y, z,$$

і, отже

$$\frac{d}{dt}(mv_i\gamma) = F_i \quad (2.73)$$

для  $i = x, y, z$ . У векторному вигляді це може бути записано таким чином:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.74)$$

Отже, отримана просторова частина рівняння руху релятивістської механіки – основне рівняння руху релятивістської динаміки. При цьому рівняння (2.74) інваріантне відносно перетворень Лоренца і має той же вигляд (2.70), що і рівняння II закону Ньютона класичної механіки (2.10), але з іншим визначенням імпульсу (2.69). За формулю воно тотожне ньютіновському рівнянню руху, а вектори  $\mathbf{v}$  і  $\mathbf{F}$  мають звичайний тривимірний сенс.

### 2.11.5 Наслідки з релятивістського рівняння руху

При граничному переході  $v \ll c$  релятивістський імпульс (2.69)

переходить в класичний, а релятивістське рівняння (2.74) переходить в рівняння руху класичної механіки Ньютона (2.10). За формою запису ці два рівняння схожі, але з релятивістського рівняння виходять абсолютно нові наслідки. Насправді, обчислимо в явному вигляді похідну за часом в (2.74):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\gamma) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\gamma + m\mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt},$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

У свою чергу

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{-\frac{1}{2} \left( -\frac{2\mathbf{v}}{c^2} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \gamma^3.$$

Таким чином, маємо

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \gamma^3 = \mathbf{F}. \quad (2.75)$$

Обидві частини (2.75) помножимо на  $\frac{\mathbf{v}}{c^2}$ :

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2} + \frac{mv^2}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \gamma^3 \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2}. \quad (2.76)$$

У останньому виразі в лівій його частині виконає перетворення, винісши за дужки загальний множник:

$$\frac{m\gamma}{c^2} \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \left( 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2}. \quad (2.77)$$

Перетворимо вираз в дужках в (2.77):

$$1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2.$$

Тоді після перетворень отримуємо:

$$\frac{m\gamma}{c^2} \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \gamma^2 = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2}.$$

Звідси:

$$\frac{m\gamma^3}{c^2} \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2}. \quad (2.78)$$

Отриманий вираз (2.78) підставляємо в (2.75), в результаті маємо:

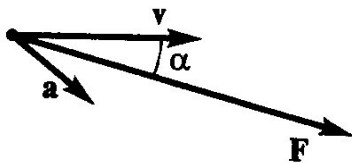
$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2} \right) = \mathbf{F}.$$

У остаточному вигляді отримуємо:

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2} \right). \quad (2.79)$$

Отримане рівняння носить назву **квазікласичного рівняння руху** і може бути використане для опису руху заряджених частинок в різних полях, зокрема, в електричних і магнітних [6]. З цього рівняння видно, що:

1) в загальному випадку вектори  $\mathbf{v}$ ,  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}$  не співпадають за напрямом, а величина прискорення  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$  залежить від кута  $\alpha$  між векторами  $\mathbf{F}$  і  $\mathbf{v}$  (рис. 2.19).



**Рис. 2.19. Напрями векторів в релятивістській динаміці**

2) в нерелятивістській механіці інертну масу визначають як відношення модуля сили до модуля прискорення. Як виходить з отриманого співвідношення, в релятивістському випадку це співвідношення не може визначати яку-небудь фізичну величину. В зв'язку з цим є неправильним говорити про те, що

частинки мають різні інертні маси унаслідок того, що вектор  $\mathbf{F}$  може бути спрямований під різними кутами до вектора  $\mathbf{v}$ . При  $\mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$  говорять про «подовжню масу», при  $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$  – про «поперечну масу», визначаючи тим самим цілий набір «мас» [1]. Насправді, в сучасній теорії відносності такі поняття не використовують.

Використовуємо (2.79) для аналізу руху частинок в різних полях.

1. При  $\mathbf{v} \uparrow\uparrow \mathbf{F}$  рівняння набуває вигляду:

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\mathbf{F}}{\gamma^2},$$

або

$$m\gamma^3 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.80)$$

Це рівняння руху частинки заряду  $q$  в лінійних прискорювачах в постійному електричному полі напруженістю  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0$  (рис. 2.20). Сила не залежить від швидкості руху частки.

2. При  $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$  скалярний добуток  $(\mathbf{F}\mathbf{v}) = 0$ ,

а рівняння набуває вигляду:

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\gamma}.$$

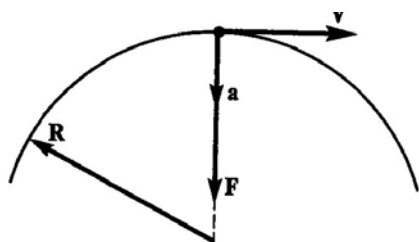


Рис. 2.20. Рух релятивістської частинки в лінійних прискорювачах

Сила перпендикулярна швидкості тоді, коли частинка рухається під дією сили Лоренца  $\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ , тобто в магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$ . В цьому випадку частка рухається по колу з прискоренням  $\frac{v^2}{R}$  (рис. 2.21).

Звідси виходить, що для двох розглянутих випадків, коли прискорення і сила спрямовані однаково, коефіцієнт пропорційності між силою і прискоренням різний. У проміжному випадку зв'язок між силою і прискоренням носить складніший (тензорний) характер. Не можна вказати

ніякої однозначної залежності маси від швидкості, придатної для усіх випадків. Тому розумно користуватися інваріантною масою спокою.



Отже, написане у вигляді

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\gamma) = \mathbf{F}$$

рівняння руху в релятивістському випадку

**Рис.2. 21. Рух релятивістської частинки під дією сили Лоренца**

призводить до закону збереження імпульсу і при  $v \ll c$  переходить у форму основного

рівняння II закону Ньютона. У такому вигляді це рівняння інваріантне по відношенню до перетворень Лоренца і задовольняє принципу відносності Ейнштейна. Однак 4-вимірна сила не інваріантна при переході з однієї ІСВ в іншу і перетворюється за правилами перетворення 4-векторів.

### Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Тіло масою  $m$  кинути в полі тяжіння з невеличкої швидкістю  $V_0$  під кутом  $\theta$  до горизонту. Сила опору повітря є  $F = -\alpha V$ . Якою буде швидкість тіла у верхній точці траєкторії?

2.2. Людина маси  $M$  стрибає під кутом  $\alpha$  до горизонту із швидкістю  $v_0$ . У вищій точці людина кидає назад гирю маси  $m$  із швидкістю  $v_1$  відносно себе. Наскільки збільшиться дальність стрибка?

2.3. Визначити закон зміни маси ракети при вертикальному підйомі в однорідному полі тяжіння: а) з постійною швидкістю; б) з постійним прискоренням. Швидкість витікання газів постійна і дорівнює  $u$ .

2.4. Знайти вираз для тривимірного прискорення частинки з релятивістського рівняння руху.

## РОЗДІЛ III

### РОБОТА І ЕНЕРГІЯ

#### 3.1 Робота сили. Потужність

Нехай частинка масою  $m$  під дією сили  $\mathbf{F}$  переміщується по деякій траєкторії з точки 1 в точку 2. Напрямок і модуль сили можуть змінюватись уздовж траєкторії довільним чином. Розглянемо нескінченно малий відрізок траєкторії довільного виду між нескінченно близькими точками з радіус-векторами  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ . Нехай в точці  $\mathbf{r}$  діє сила  $\mathbf{F}$ . Нехтуватимемо зміною сили на проміжку траєкторії від  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , вважаючи його прямолінійним. Роботою сили  $\mathbf{F}$  на елементарному переміщенні  $d\mathbf{r}$  називають проекцію цієї сили на напрям переміщення, помножений на саме переміщення (рис. 3.1):

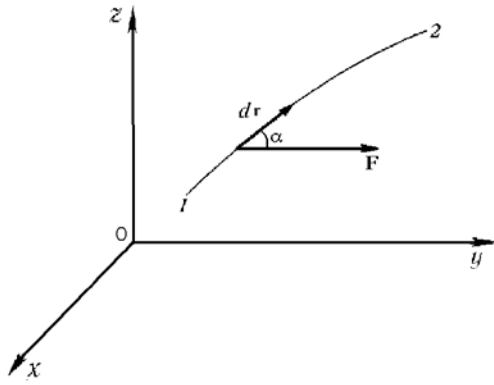
$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Тут кут  $\alpha$  – кут між векторами  $\mathbf{F}$  і  $d\mathbf{r}$ . Підсумовуючи це співвідношення по всіх елементарних відрізках під час переміщення частинки від точки 1 до точки 2 траєкторії, можна знайти роботу на всьому шляху, тобто робота визначається інтегруванням сили уздовж шляху переміщення  $L$ . Ця величина може набувати як додатних, так і від’ємних значень – все залежить від кута між силою і переміщенням. Загалом

$$A_{1,2} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_L \delta A, \quad (3.2)$$

і робота  $A_{1,2}$  залежить від характеристик сил і виду траєкторії, по якій рухається частинка. Саме тому використовують символ  $\delta A$ , а не  $dA$ . Величина  $dA$  – характеристика алгебраїчна, для якої нескінченно малий приріст залежить від знаку проекції на напрям переміщення. Але матеріальна точка не може мати приріст або спад роботи, робота здійснюється силою.





**Рис. 3.1. Елементарне переміщення частинки під дією сили**

Робота – це функція процесу, але не стану. Не можна говорити про приріст або спад роботи, говорять про здійснення роботи. Інтеграл (3.2) означає, що сила здійснила скінченну роботу на траєкторії  $L$ , яка дорівнює сумі елементарних робіт  $\delta A$  на елементарних переміщеннях  $d\mathbf{r}$ . Щоб відрізнити функцію

процесу від функції стану, нескінченно малу роботу і позначають  $\delta A$  [6,14]. Зазначимо, що у формулі (3.2) під  $d\mathbf{r}$  слід розуміти переміщення точки внаслідок прикладення сили  $\mathbf{F}$ .

Властивістю роботи є її адитивність. Якщо  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ , то

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \text{ де } \forall A_i = \int_1^2 \mathbf{F}_i d\mathbf{r}.$$

Одиницею роботи в SI є джоуль. Один джоуль дорівнює роботі, що здійснюється силою 1 н на шляху в 1 м за умови збігу сили і переміщення.

Щоб характеризувати «швидкість» здійснення роботи, вводять поняття потужності. Потужність – робота, що здійснюється силою в одиницю часу

$$\mathbb{P} = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}. \quad (3.3)$$

І робота і потужність – величини скалярні. Знаючи потужність сили, можна знайти і роботу, яку здійснює сила за скінченний проміжок часу:

$$A = \int_t^{t+\Delta t} \mathbb{P}(t) dt. \quad (3.4)$$

Одиницею потужності в SI є ват (Вт): 1 Вт =дж/с. Видно, що якщо  $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$ , то  $\delta A = 0$ .

### 3.2 Кінетична енергія

Перетворимо вираз для елементарної роботи таким чином:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = m \frac{d(v^2)}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

У цьому перетворенні  $d\mathbf{v}$  означає елементарний приріст вектора  $\mathbf{v}$ , який може не співпадати за напрямом з вектором  $\mathbf{v}$  (рис. 3.2). За визначенням скалярного добутку

$$\mathbf{v} d\mathbf{v} = |\mathbf{v}| |d\mathbf{v}| \cos \alpha = v dv,$$

де  $dv = |d\mathbf{v}| \cos \alpha$  – елементарний приріст модуля (довжини) вектора  $\mathbf{v}$ . Звідси і отримуємо, що

$$v dv = \frac{d(v^2)}{2}.$$

Це співвідношення справедливе для будь-якого вектора. Звідси витікає, що робота сили  $\mathbf{F}$  (де  $\mathbf{F}$  можна вважати як результуючу усіх сил, що діють на дану матеріальну точку) пов'язана з приростом деякої величини, яку називають кінетичною енергією:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} d\mathbf{r}; \quad \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Таким чином, величину

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{p^2}{2m}, \quad (3.5)$$

називають кінетичною енергією частинки. Повна робота на відрізку 1-2 дорівнює:

$$A_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1. \quad (3.6)$$

Інакше кажучи, *приріст кінетичної енергії частинки в процесі деякого*

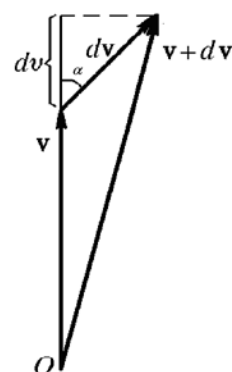


Рис. 3.2. Елементарний приріст  $d\mathbf{v}$  вектора  $\mathbf{v}$

скінченного переміщення дорівнює сумарній роботі всіх сил, що діють на частинку. Це теорема про зміну кінетичної енергії [1, 6, 14]. Кінетична енергія характеризує здатність матеріальної частинки виконувати роботу.

Обчислимо похідну

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = \mathbb{P},$$

тобто похідна кінетичної енергії за часом – це потужність усіх сил, що діють на точку.

Розглянемо роботу сил, які часто використовуються в механіці [5, 6].

**1. Робота пружної сили.** Сила пружності пружини, коли здійснюються невеликі розтягування і стискання, може бути представлена у вигляді співвідношення закону Гуку:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

де  $k$  – коефіцієнт пружності,  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор частинки відносно точки  $O$  початку системи координат (рис. 3.3). Знак «мінус» означає, що сила спрямована убік, протилежний до зміщення з положення рівноваги, в якому пружина не деформована. Елементарна робота на елементарному переміщенні  $d\mathbf{r}$ :

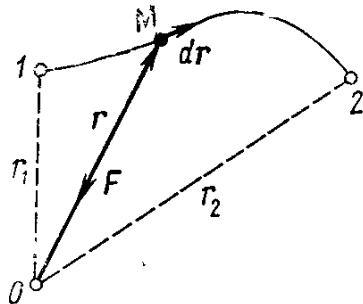


Рис. 3.3. Робота пружної сили

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = -k\mathbf{r} d\mathbf{r}.$$

Скалярний добуток  $\mathbf{r} d\mathbf{r} = r dr$ . Тоді

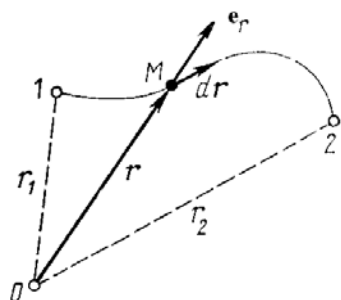
$$\delta A = -k\mathbf{r} d\mathbf{r} = -d\left(\frac{k\mathbf{r}^2}{2}\right).$$

Робота переміщення точки з положення 1 в положення 2:

$$A_{1,2} = -\int_1^2 d\left(\frac{k\mathbf{r}^2}{2}\right) = -\left(\frac{k\mathbf{r}_2^2}{2} - \frac{k\mathbf{r}_1^2}{2}\right) = \frac{k\mathbf{r}_1^2}{2} - \frac{k\mathbf{r}_2^2}{2}. \quad (3.7)$$

**2. Робота гравітаційної (кулонівської) сили.** Нехай в точці  $O$  знахо-

диться нерухомий силовий центр – матеріальна точка, що діє на частинку масою  $M$  з силою  $\mathbf{F}$  (рис. 3.4). Ця сила може бути представлена у вигляді:



**Рис. 3.4. Робота гравітаційної (кулонівської) сили**

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\alpha}{r^2} \right) \mathbf{e}_r,$$

де  $\alpha$  – стала ( $-Gm_1m_2$  або  $kq_1q_2$  для гравітаційного або кулонівського поля відповідно),  $r$  – величина відстані від точки  $O$  до частинки масою  $M$ ,  $\mathbf{e}_r$  – орт радіус-вектора  $\mathbf{r}$ .

Елементарна робота цієї сили на переміщенні  $d\mathbf{r}$ :

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = \left( \frac{\alpha}{r^2} \right) \mathbf{e}_r d\mathbf{r}.$$

Скалярний добуток  $\mathbf{e}_r d\mathbf{r} = dr$ , тобто дорівнює приросту модуля вектора  $\mathbf{r}$ , тому

$$\delta A = \alpha \frac{dr}{r^2} = -d\left( \frac{\alpha}{r} \right).$$

Робота цієї сили на всьому шляху від точки 1 до точки 2 дорівнює:

$$A_{1,2} = -\int_1^2 d\left( \frac{\alpha}{r} \right) = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}. \quad (3.8)$$

**3. Робота сили тяжіння.** Запишемо силу у вигляді  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ , де  $\mathbf{k}$  – орт осі  $z$  (рис. 3.5). Тоді:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = -mg\mathbf{k} d\mathbf{r}.$$

Скалярний добуток  $\mathbf{k} d\mathbf{r} = (d\mathbf{r})_k = dz$  є проекція вектору елементарного переміщення  $d\mathbf{r}$  на напрям осі  $z$ . Звідси елементарна робота  $\delta A = -mgdz = -d(mgz)$ . Повна робота

$$A_{1,2} = -\int_1^2 d(mgz) = mg(z_1 - z_2). \quad (3.9)$$

В усіх розглядуваних вище випадках робота сили не залежить від форми шляху між точками 1 і 2, а залежить тільки від координат початкового і кінцевого положення точок. Не всі сили, проте, мають таку властивість. Наприклад, сила тертя, яка спрямована проти відносної швидкості точки, такої властивості не має. Навіть якщо сила тертя не залежить від швидкості, то її робота, залежить від довжини шляху, по якому рухається частинка. Робота сили сухого тертя під час переміщення частинки з точки 1 в точку 2 по різних траєкторіях буде різна.

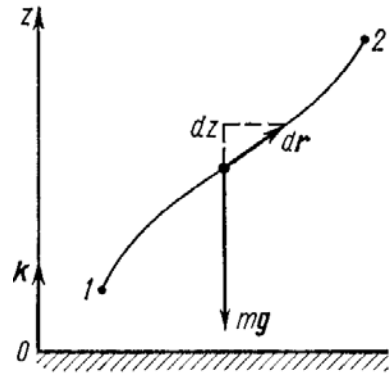


Рис. 3.5. Робота сили тяжіння

### 3.3 Поле сил. Потенціальна енергія.

#### Потенціальна сила

Наведемо **визначення поля сил** [16, 18, 24]. Поле сил – це область простору, в кожній точці якого на поміщену туди частинку діє сила. Поле сили тяжіння, кулонівське поле (поле кулонівських сил) – приклади таких полів.

Поле гравітаційних сил (окремий випадок – поле сили тяжіння), поле, кулонівських і пружних сил можна узагальнити, ввівши поняття **поля центральних сил**. Центральним силовим полем називатимемо таке поле, в якому лінія дії сили проходить через одну і ту ж точку (силовий центр або полюс), а величина сили залежить тільки від відстані даної частинки до полюса. Отже, центральні або центральносиметричні сили – це сили, спрямовані до однієї точки або від однієї точки – силового центру, залежать тільки від відстані до цього центру, і спрямовані уздовж радіус-вектора, що з'єднує силовий центр і точку. Центральна сила може бути представлена у вигляді:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.10)$$

Робота центральних сил не залежить від шляху переміщення в полі цих сил, а залежить тільки від характеру взаємодії і від значень  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  – початкової і кінцевої відстані між частинкою і силовим центром. Насправді

$$\delta A = \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = F(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{r} = F(\mathbf{r}) \frac{r dr}{r} = F(\mathbf{r}) dr,$$

де використаний той факт, що скалярний добуток  $\mathbf{r} d\mathbf{r} = r dr$  як встановлено вище. Те ж можна довести, якщо ввести одиничний орт у напрямі радіус-вектора. Нехай  $\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$ . Тоді

$$\delta A = \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = F(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{r} = F(\mathbf{r}) \mathbf{e}_r d\mathbf{r} = F(\mathbf{r}) dr,$$

оскільки  $\mathbf{e}_r d\mathbf{r} = dr$  – проекція  $d\mathbf{r}$  на напрям  $\mathbf{e}_r$ , а, отже, на напрям радіус-вектора  $\mathbf{r}$ . Робота по переміщенню частинки з положення з радіус-вектором  $\mathbf{r}_1$  в положення з радіус-вектором  $\mathbf{r}_2$  дорівнює

$$A_{1,2} = \int_1^2 F(\mathbf{r}) dr,$$

звідки і виходить твердження.

Ця обставина уможлиблює введення поняття потенціальної енергії частинки в поле таких сил. Оскільки робота сил поля не залежить від шляху, то залишається залежність її тільки від положення точки з фіксованим положенням центру сил (точки О). Це означає, що така робота буде деякою функцією радіус-вектора  $\mathbf{r}$  конкретної частинки, розташованої в точці Р:

$$A_{PO} = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

де  $U(\mathbf{r})$  – деяка скалярна функція векторного аргументу – функція координат, яку називають потенціальною енергією частинки в цьому полі. Та-

ким чином, потенціальна енергія – це робота, яка здійснюється результуючою силою  $\mathbf{F}$  поля, що діє на матеріальну точку, і переміщує її із положення з радіус-вектором  $\mathbf{r}_1$  в положення з радіус-вектором  $\mathbf{r}_2$ . У загальному випадку потенціальна енергія точки в полі може бути і функцією часу:

$$U = U(\mathbf{r}, t).$$

Якщо існує така скалярна функція координат і часу  $U = U(\mathbf{r}, t)$ , то сила, що діє на частинку, може бути представлена у вигляді

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Тоді говорять, що частинка знаходиться під дією сил зовнішнього потенціального поля або в зовнішньому полі потенціальних сил, а сама функція – це потенціальна енергія, потенціал або потенціальна функція [14, 16]. Силу, яка визначається співвідношенням (3.12), називають потенціальною силою. Робота потенціальної сили завжди дорівнює зміні потенціальної енергії в процесі переміщення частинки.

### 3.4 Поняття градієнта функції

Розглянемо коротко математичне введення, що пояснює поняття градієнта функції [1-3, 5-7]. Нехай ми маємо функцію декількох змінних  $\varphi(x, y, z)$ . Дамо приріст  $x + dx, y + dy, z + dz$  аргументам функції, а сама функція з новими аргументами матиме вигляд  $\varphi(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Тоді повний приріст функції

$$d\varphi = \varphi(x + dx, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y, z)$$

може бути записано таким чином:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (3.13)$$

де

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y,z} = \varphi'_x; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x,z} = \varphi'_y; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{x,y} = \varphi'_z;$$

означають частинні похідні функції  $\varphi(x, y, z)$ , тобто це похідні по одному з аргументів, якщо фіксовані значення двох інших аргументів:  $\varphi'_x$  знаходять якщо  $(y, z) = \text{const}$ ;  $\varphi'_y$  – для  $(x, z) = \text{const}$ ;  $\varphi'_z$  – для  $(x, y) = \text{const}$  відповідно.

**Приклад.** Нехай  $\varphi = x^2 y z^3$ . Частинні похідні цієї функції по кожному з аргументів мають вигляд:  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xyz^3$ ;  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 z^3$ ;  $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 3x^2 y z^2$ .

Введемо формально вектор  $\vec{\nabla}\varphi$  з координатами  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ . Тоді

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right). \quad (3.14)$$

Знайдемо скалярний добуток вектора елементарного переміщення  $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$  і введеного нами вектора  $\vec{\nabla}\varphi$ . За правилами обчислення скалярного добутку двох векторів він дорівнює сумі добутків відповідних координат векторів, які перемножуються:

$$(\vec{\nabla}\varphi d\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Порівнюючи отриманий вираз з (3.13), видно, що

$$(\vec{\nabla}\varphi d\mathbf{r}) = d\varphi(\mathbf{r}), \quad (3.15)$$

тобто скалярний добуток  $(\vec{\nabla}\varphi d\mathbf{r})$  дорівнює повному приросту функції  $\varphi(x, y, z) = \varphi(\mathbf{r})$ . Вектор  $\vec{\nabla}\varphi d\mathbf{r}$  називають **градієнтом** скалярної функції векторного аргументу і позначають  $\text{grad}\varphi(\mathbf{r})$ , а значок  $\vec{\nabla}$  називають оператором «набла». Набла – це диференціальний векторний символічний оператор – певна дія на функцію, що стоїть під оператором. В даному випадку



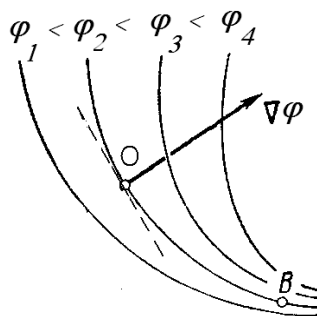


Рис. 3.6. Напрямок вектору  $\vec{\nabla}\varphi(\mathbf{r})$   
дія має вигляд

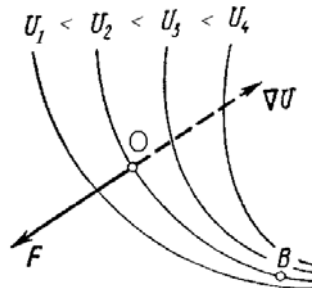


Рис. 3.7. Напрямок векторів  $\vec{\nabla}U(\mathbf{r})$  і  $\mathbf{F}$

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

Отже,

$$\vec{\nabla}\varphi(\mathbf{r}) \equiv \text{grad}\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (3.16)$$

тобто  $\vec{\nabla}\varphi d\mathbf{r}$  формально можна розглядати, як добуток символічного векторного оператора  $\vec{\nabla}$  на скаляр  $\varphi(\mathbf{r})$ . Геометрична інтерпретація вектора (3.16) означає наступне. Введемо поняття еквіпотенціальних поверхонь функції  $\varphi(x, y, z) = \varphi(\mathbf{r})$  – поверхонь однакового рівня. В усіх точках цієї поверхні функція  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ . Кожному значенню аргументів  $(x, y, z)$  відповідає своє значення функції  $\varphi(x, y, z)$ . Проведемо площину, дотичну до однієї з поверхонь в деякій точці O. Під час переміщення частинки в дотичній площині з точки O на  $d\mathbf{r}$  у будь-якому напрямку,  $d\varphi(\mathbf{r}) = 0$ , тобто проекція вектора  $\vec{\nabla}\varphi(\mathbf{r}) \equiv \text{grad}\varphi(\mathbf{r})$  в цій точці дорівнює нулю,  $(\vec{\nabla}\varphi d\mathbf{r}) = d\varphi(\mathbf{r}) = 0$ . Це означає, що вектор  $\vec{\nabla}\varphi(\mathbf{r}) \equiv \text{grad}\varphi(\mathbf{r})$  нормальний вектору переміщення  $d\mathbf{r}$ , що лежить в еквіпотенціальній поверхні в цій точці і спрямований у бік найбільш швидкого зростання функції  $\varphi(x, y, z)$  (рис. 3.6). Якщо тепер замість  $\varphi(x, y, z)$  використати функцію  $U = U(\mathbf{r}, t)$  – потенціальну енергію частки в полі сил, то для неї справедливі ті ж самі

результати, отримані вище для довільної функції  $\varphi(x, y, z)$ . Зокрема,  $\vec{\nabla}U(\mathbf{r})d\mathbf{r} = dU(\mathbf{r})$ . З (3.12) виходить що  $\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r})$ , а для усіх точок еквіпотенціальної поверхні  $dU(\mathbf{r}) = 0$ . Отже, скалярний добуток  $\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0$ , і вектор  $\mathbf{F}$  також нормальний еквіпотенціальній поверхні в точці  $O$  і спрямований у бік, протилежний найбільш швидкому зростанню функції  $U = U(\mathbf{r}, t)$  (рис. 3.7), тобто у бік зменшення  $U = U(\mathbf{r}, t)$ .

### 3.5 Консервативні сили. Робота консервативних сил

Вважатимемо, що матеріальна точка знаходиться в полі потенціальних сил, для якого

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}).$$

У загальному випадку  $U = U(\mathbf{r}, t)$  може бути функцією як координат, так і часу. Якщо функція  $U = U(\mathbf{r}, t)$  залежить від часу, то поле сил буде не-стаціонарним – сила в кожній точці також явно залежатиме від часу. У разі стаціонарного поля  $U = U(x, y, z) = U(\mathbf{r})$ . Такому полю відповідає функція  $U = U(\mathbf{r})$ , явно від часу не залежна і така, що є тільки функцією координат.

Крім того, функція  $U = U(\mathbf{r})$  може неявно залежати від часу, оскільки є залежність від часу радіус-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , тобто  $U = U[\mathbf{r}(t)]$ . Стаціонарні потенціальні сили називають консервативними [10, 16, 22]. Поля, де діють консервативні сили, називають консервативними. Сили, що діють на матеріальну точку в стаціонарному потенціальному полі, є консервативними. Отже, в загальному випадку для потенціального поля приріст фун-

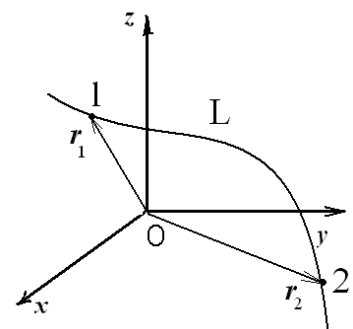


Рис. 3.8. Рух точки по траєкторії  $L$  в полі консервативних сил

кції може бути записаний як

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt = \vec{\nabla} U d\mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (3.17)$$

Якщо  $\frac{\partial U}{\partial t} dt = 0$ , тобто, коли  $U(t) = \text{const}$ , маємо поле консервативних сил.

Розглянемо поле консервативних сил. З урахуванням (3.12)

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla} U(\mathbf{r}) = -\text{grad} U(\mathbf{r})$ . Це співвідношення перепишемо у вигляді:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad (3.18)$$

де величини

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}; \quad (3.19)$$

є проекціями вектора  $\mathbf{F}$  на орти  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  відповідної системи координат.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається в полі консервативних сил (рис. 3.8). В цьому випадку  $U = U(x, y, z) = U(\mathbf{r})$ . Повний диференціал цієї

функції  $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$ . З урахуванням визначення вектора

$\text{grad} U(\mathbf{r})$  диференціал (приріст) функції  $U = U(\mathbf{r})$  можна представити як скалярний добуток  $(\text{grad} U \cdot d\mathbf{r})$ :

$$dU(\mathbf{r}) = \text{grad} U(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \vec{\nabla} U(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.20)$$

Тоді елементарна робота консервативної сили

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\text{grad} U(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r}), \quad (3.21)$$

тобто дорівнює із зворотним знаком диференціалу потенціальної енергії.

Сума елементарних робіт, що здійснюються на різних малих відрізках траєкторії під час переміщення матеріальної частинки від точки 1 до точки 2 з радіус-векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  відповідно уздовж кривої  $L$ , буде виражена інтегралом виду:

$$A_{1,2} = \int_L \delta A = \int_{r_1}^{r_2} \delta A = - \int_{r_1}^{r_2} dU(\mathbf{r}) = - \int_{r_1}^{r_2} dU(\mathbf{r}), \quad (3.22)$$

і дорівнює інтегралу із зворотним знаком від приросту її потенціальної енергії. У даному випадку консервативних сил  $U = U(\mathbf{r})$ , тобто є функцією тільки координат. Сума нескінченно малих приростів дорівнює її повному приросту, який дорівнює різниці значень цієї функції в точках 1 і 2:

$$A_{1,2} = -\Delta U; \Delta U = U_2 - U_1 = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1). \quad (3.23)$$

Отже, робота консервативних сил поля під час переміщення точки у цьому полі на відрізку шляху між точками 1-2 траєкторії дорівнює спаду потенціальної енергії точки на цьому відрізку.

Отже, приходимо до висновку, що робота, яка здійснюється консервативною силою, не залежить від шляху, по якому рухається частинка, а визначається тільки значеннями потенціальної енергії на початку і кінці шляху. Справедливо і зворотне твердження: якщо робота під час переміщення частинки в постійному силовому полі з точки 1 в точку 2 не залежить від форми траєкторії, по якій частинка переміщається з точки 1 в точку 2, то на частинку діє консервативна сила.

Якщо, переміщуючись по деякій замкнутій траєкторії, частинка повертається в точку, з якої почала свій рух, то, як виходить з визначення,

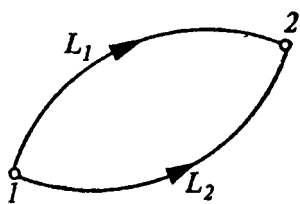
$$\int_{L_1}^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{L_2}^1 \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_{L_2}^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (3.24)$$

Звідси випливає [2], що

$$\int_{L_1}^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{L_2}^1 \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0.$$

Або

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0 \quad (3.25)$$



**Рис. 3.9.** До критерію консервативності поля сил

дорівнювала нулю.

**Приклад** [6]. Нехай задана потенціальна енергія матеріальної частинки  $U = -\alpha xy$ . Знайдемо компоненти сили, що діють на частинку в точці простору з координатами  $(x, y, z)$ :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha y; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \alpha x; \quad F_z = 0.$$

Вектор сили

$$\mathbf{F} = \alpha(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Потенціальну енергію можна знайти по заданій силі. Оскільки  $\mathbf{F}d\mathbf{r} = -\text{grad}U(\mathbf{r})d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r})$ , то

$$U = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} + C, \quad (3.26)$$

де  $C$  – стала, що визначає нульовий рівень потенціальної енергії. Вибір його довільний і не впливає на значення сили і її роботи.

Потенціальна нестационарна (неконсервативна) сила, яка залежить явно не лише від положення точки, але і від часу, називають нестационарною потенціальною силою [22]. Нестационарність силового поля може бути обумовлена переміщенням джерела поля відносно системи відліку. В цьому випадку  $U = U(\mathbf{r}, t) = U(x, y, z, t)$ . Елементарний приріст потенціальної енергії в такому полі може бути обумовлений як зміною положення матеріальної точки в просторі, так і нестационарністю поля:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Частинна похідна  $\frac{\partial U}{\partial t}$  має сенс приросту потенціальної енергії в одиницю часу в даній точці простору, а  $\frac{\partial U}{\partial t} dt$  – приріст за час  $dt$  в тій же точці.

Співвідношення  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r})$  і  $U = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + C$  для нестационарного поля справедливі для фіксованого значення часу. Крім того, з (3.17) виходить, що

$$\vec{\nabla}U d\mathbf{r} = dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Звідси,

$$\delta A = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Отже

$$A_{1,2} = -\Delta U + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

залежить від шляху переходу з початкового положення в кінцеве, оскільки в одному і тому ж кінцевому положенні матеріальна точка матиме в загальному випадку різну потенціальну енергію, якщо перехід здійснювався по різних траєкторіях (різними шляхами). Для визначення роботи на скінченному шляху необхідно знати закон руху матеріальної точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

### 3.6 Робота сторонніх сил.

#### Закон збереження повної механічної енергії для матеріальної точки

Нехай матеріальна частинка рухається в зовнішньому полі консервативної сили  $\mathbf{F} = -\text{grad}U(\mathbf{r})$ . На частинку діє консервативна сила  $\mathbf{F}$  з боку

цього поля. Назвемо величину  $E = T + U$  повною механічною енергією матеріальної точки. На частинку, що знаходиться в зовнішньому полі консервативних сил, можуть діяти і інші сили, що не мають відношення до цього поля. Такі сили називають сторонніми силами  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$ . Сторонні сили у свою чергу можуть бути консервативними і неконсервативними:  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \mathbf{F}_{(\kappa)}^{\text{ex}} + \mathbf{F}_{(\text{нк})}^{\text{ex}}$ . Істотним є те, що ці сили не є силами поля, що цікавить нас. Таким чином, результуюча усіх сил, що діють на матеріальну точку в полі консервативних сил може бути представлена у вигляді суми сил з боку поля на точку  $\mathbf{F}_{(\kappa)}$ , і сторонніх консервативних і неконсервативних сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(\kappa)} + \mathbf{F}^{\text{ex}} = \mathbf{F}_{(\kappa)} + \mathbf{F}_{(\kappa)}^{\text{ex}} + \mathbf{F}_{(\text{нк})}^{\text{ex}}.$$

Робота, що здійснюється такою силою, може бути записана таким чином

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}_{(\kappa)} d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F}_{(\kappa)}^{\text{ex}} d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F}_{(\text{нк})}^{\text{ex}} d\mathbf{r} = A_{\text{п}} + A_{\text{стор}},$$

де

$$A_{\text{п}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{(\kappa)} d\mathbf{r}; \quad A_{\text{стор}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{(\kappa)}^{\text{ex}} d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F}_{(\text{нк})}^{\text{ex}} d\mathbf{r},$$

тобто ця робота дорівнює сумі робіт сил поля  $A_{\text{п}}$  і усіх сторонніх сил, консервативних і неконсервативних. З іншого боку, робота усіх сил, що діють на матеріальну точку дорівнює приросту кінетичної енергії точки:

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d(T),$$

і відповідно

$$A = T_2 - T_1,$$

згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії. Таким чином отримуємо:

$$T_2 - T_1 = A_{\text{п}} + A_{\text{стор}}. \quad (3.27)$$

Оскільки частинка знаходиться в полі консервативних сил, робота сил поля – це різниця потенціальних енергій частинки в точках 1 і 2, тобто дорі-

вноє спаду потенціальної енергії частинки в полі цих сил і не залежить від форми шляху:

$$A_n = -\Delta U = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) = U_1 - U_2.$$

Звідси отримуємо:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{\text{стор}}. \quad (3.28)$$

Перепишемо (3.28) в такому вигляді:

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A_{\text{стор}}.$$

Виходячи з нашого визначення повної механічної енергії, отримуємо:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{стор}}. \quad (3.29)$$

Або

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta A}{dt} = \mathbb{P}_{\text{стор}},$$

де  $\mathbb{P}_{\text{стор}}$  – потужність сторонніх сил. Отже, приріст повної механічної енергії матеріальної точки дорівнює роботі усіх сторонніх сил, що діють на точку. Якщо  $A_{\text{стор}} > 0$ , повна механічна енергія збільшується, якщо  $A_{\text{стор}} < 0$  – зменшується. Отримане співвідношення справедливе для повної механічної енергії в полі консервативних сил під час переміщення частинки з точки 1 в точку 2.

Повна механічна енергія частинки може змінюватися тільки під дією сторонніх сил, тому звідси безпосередньо виходить закон збереження повної механічної енергії для частинки: якщо  $A_{\text{стор}} = 0$ , тобто, якщо робота сторонніх сил дорівнює нулю, повна механічна енергія частки в полі консервативних сил зберігається [6,14]:

$$E_2 - E_1 = 0; E_1(t) = E_2(t); E = T + U = \text{const} \quad (3.30)$$

Якщо сторонні сили відсутні або не виконують роботу впродовж проміжку часу, повна механічна енергія в консервативному полі залишається сталою або зберігається.



Які сили відноситимемо до числа неконсервативних?

1. В першу чергу це сили тертя або дисипативні сили, тобто сили, які розсіюють, зменшують енергію. Це сили, спрямовані проти руху, сили гальмування. У загальному випадку їх можна задати у вигляді (2.7) або (2.8). Робота цих сил залежить від траєкторії руху, а не тільки від координати. Насправді, нехай розташований на шорсткій поверхні брусок, який можна вважати матеріальною точкою, переміщається під дією сили  $\mathbf{F}$  по криволінійній траєкторії з точки 1 в точку 2. На брусок діє сила тертя ковзання. Підраховуючи елементарну роботу сили тертя на елементарному відрізку, а потім підсумовуючи (інтегруючи) усі роботи по усіх елементарних відрізках в процесі руху бруска від точки 1 до точки 2, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{тер}} &= k\mathbf{N} = kmg; \\ \delta A_{\text{тер}} &= \mathbf{F}_{\text{тер}} d\mathbf{r} = F_{\text{тер}} dr \cos 180^\circ = -kmg dS; \\ A_{\text{тер}} &= \int_1^2 \delta A_{\text{тер}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{тер}} d\mathbf{r} = -kmg \int_1^2 dS = -kmgS.\end{aligned}$$

Оскільки елементарна робота залежить тільки від однієї змінної – довжини шляху бруска, обчислення інтеграла по траєкторії зводиться до інтегрування за шляхом. Отже,  $A_{\text{тер}} = f(S)$ , тобто залежить від довжини траєкторії і її форми. Робота дисипативних сил завжди від’ємна, що є характерною рисою цих сил.

2. До числа неконсервативних сил відносять гіроскопічні сили [14,16], для яких сила лінійно залежить від швидкості і завжди перпендикулярна цій швидкості. Прикладом такої сили є сила Лоренца, що діє на частинку в магнітному полі напруженості  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]; \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}).$$

Проте, зарядженій частинці в магнітному полі не можна приписати потенціальну енергію, оскільки такої скалярної функції не існує. Потужність

гіроскопічних сил дорівнює нулю, тобто  $\mathbf{F}\mathbf{v} = 0$ , оскільки  $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ . Отже, сила Лоренца – потенціальна сила або псевдоконсервативна, оскільки її робота не залежить від форми траєкторії. Ця робота завжди дорівнює нулю.

### 3.7 Закон збереження повної механічної енергії системи не взаємодіючих матеріальних точок

Узагальнимо результат, отриманий в підрозділі 3.6, на систему не взаємодіючих матеріальних точок. Під системою матеріальних точок можна розуміти тверде тіло, газ, механізми.

Кінетичною енергією системи точок назовемо суму кінетичних енергій точок, з яких ця система складається:

$$T = \sum_i \frac{mv_i^2}{2} = \sum_i T_i. \quad (3.31)$$

Розглянемо систему не взаємодіючих точок, що знаходяться в зовнішньому полі консервативних сил, де потенціальна енергія кожної частинки в такому полі є  $U_i = U_i(\mathbf{r}_i)$ . Величина

$$E_i = T_i + U_i \quad (3.32)$$

є повною механічною енергією  $i$ -тої точки під час її руху в зовнішньому полі консервативних сил, а

$$E = \sum_i E_i$$

це повна механічна енергія не взаємодіючих частинок. Для однієї частинки в полі консервативних сил ми отримали, що

$$E_{2i} - E_{1i} = A_{\text{стор}_i}.$$

Тобто, приріст повної механічної енергії точки дорівнює роботі усіх сторонніх сил, що діють на точку. Аналогічним чином, узагальнюючи цей

результат на систему не взаємодійних точок, отримаємо, що якщо  $A_{\text{стор}} = 0$ , то як виходить з (3.30),

$$E_2 = E_1.$$

Для системи не взаємодійних частинок це виконується для кожної  $i$ -тої частинки:

$$E_i = T_i + U_i - \text{const}.$$

Підсумовуючи тепер по усіх матеріальних точках механічної системи, отримуємо:

$$\begin{aligned} \sum_i E_i &= \sum_i T_i + \sum_i U_i = \text{const}; \\ E &= T + U = \text{const}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Тут

$$E = \sum_i E_i; \quad T = \sum_i T_i; \quad U = \sum_i U_i.$$

За відсутності сторонніх сил повна механічна енергія системи не взаємодіючих точок в зовнішньому консервативному полі зберігається.

### 3.8 Потенціальна енергія взаємодії точок

Розглянемо систему взаємодіючих точок у відсутність зовнішнього силового поля. Зміна кінетичної енергії системи відбувається під дією внутрішніх сил. Внутрішні сили, що характеризують взаємодію точок між собою, можуть бути в загальному випадку як консервативними, так і неконсервативними. Вважатимемо, в системі діють тільки внутрішні консервативні сили, які є центральними силами, що відповідає дійсності. Робота цих сил може бути представлена як узятую із зворотним знаком зміну потенціальної енергії системи – скалярній функції, залежній від взаємного розташування частинок, тобто від її конфігурації. Цю енергію можна назвати «власною» потенціальною енергією, яка є характерною рисою, властивістю

цих точок і конкретного типу їх взаємодії, на відміну від «зовнішньої» потенціальної енергії – енергії системи, що знаходиться в зовнішньому полі консервативних сил.

Для двох точок,  $i$  та  $j$ , що взаємодіють з силою  $\mathbf{f}_{ij}$  і  $\mathbf{f}_{ji}$  ( $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ ) матимемо:

$$\delta A_{ij} = \mathbf{f}_{ij} d\mathbf{r}_j - \mathbf{f}_{ji} d\mathbf{r}_i = \mathbf{f}_{ij} (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{f}_{ij} d\mathbf{r}_{ij}. \quad (3.34)$$

Величина в дужках в (3.34) – це переміщення точки  $i$  відносно точки  $j$ , точніше, переміщення точки  $i$  в системі відліку, що жорстко пов'язана з точкою  $j$  та переміщається разом з нею поступально відносно точки  $i$ . Отже,

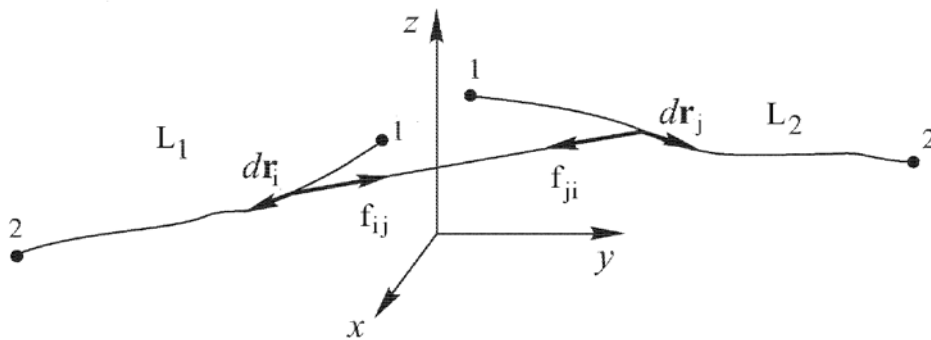


Рис. 3.10. До пояснення співвідношення (3.34)

вектор  $d\mathbf{r}_{ij}$  таким чином – відносне переміщення  $j$ -тої точки відносно  $i$ -тої точки, тобто це зміна вектора  $\mathbf{r}_{ij}$ , спрямованого від  $i$ -тої точки до  $j$ -тої точки;  $\delta A_{ij}$  – сума усіх робіт сил  $\mathbf{f}_{ij}$  і  $\mathbf{f}_{ji}$  після переміщення частинок на  $d\mathbf{r}_i$  і  $d\mathbf{r}_j$ . Алгебраїчна сума елементарних робіт пари сил взаємодії в довільній системі відліку дорівнює, виявляється, елементарній роботі, яку здійснює сила, що діє на одну з точок в системі відліку, де інша нерухома. Тобто, робота  $\delta A_{ij}$  не залежить від вибору системи відліку [13].

Сила  $\mathbf{f}_{ij}$  є центральною, тобто консервативною. Її робота на переміщенні  $d\mathbf{r}_{ij}$  може бути представлена як зменшення потенціальної енергії  $j$ -тої точки в полі  $i$ -тої точки, або як спад потенціальної енергії взаємодії двох

частинок. Таким чином, для двох частинок можемо записати, що

$$\delta A_{ij} = -dU_{ij}, \quad (3.35)$$

де  $dU_{ij}$  – функція, залежна тільки від відстані між частинками. Рис. 3.10 ілюструє визначення, дане в (3.34) на прикладі системи з двох точок. Тут  $\mathbf{f}_{ij}$  і  $\mathbf{f}_{ji}$  – сили, що діють на  $i$ -ту та  $j$ -ту точку (з III закону Ньютона вони рівні за величиною і протилежно спрямовані). Елементарна робота  $\delta A_{ij}$ , здійснювана силою  $\mathbf{f}_{ij}$  в процесі переміщення точки  $j$  на  $d\mathbf{r}_j$  є

$$\delta A_{ij} = \mathbf{f}_{ij} d\mathbf{r}_j.$$

Аналогічним чином, елементарна робота  $\delta A_{ji}$ , здійснювана силою  $\mathbf{f}_{ji}$  по переміщенню точки  $i$  на  $d\mathbf{r}_i$  є

$$\delta A_{ji} = \mathbf{f}_{ji} d\mathbf{r}_i.$$

Робота  $A_{ij}$  сили  $\mathbf{f}_{ij}$ , яка переміщує  $j$ -ту точку на скінченну відстань з точки 1 в точку 2 по кривій  $L_2$ , коли нерухома  $i$ -та точка, дорівнюватиме

$$A_{ij} = \int_{L_2}^2 \mathbf{f}_{ij} d\mathbf{r}_j.$$

Робота  $A_{ji}$  сили  $\mathbf{f}_{ji}$ , яка переміщує  $i$ -ту точку на скінченну відстань з точки 1 в точку 2 по кривій  $L_1$ , коли  $j$ -та точка нерухома, дорівнює

$$A_{ji} = \int_{L_1}^2 \mathbf{f}_{ji} d\mathbf{r}_i.$$

Оскільки за третім законом Ньютона  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ , введенням вектора відносного переміщення точок  $d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_{ij}$ , і враховуючи, що  $d\mathbf{r}_{ij} = -d\mathbf{r}_{ji}$ , отримуємо

$$A_{ij} = \int_{L_2}^2 \mathbf{f}_{ij} d\mathbf{r}_{ij} = \int_{L_1}^2 \mathbf{f}_{ji} d\mathbf{r}_{ji} = A_{ji}. \quad (3.36)$$

Отже, робота по переміщенню  $j$ -тої точки в полі нерухомої  $i$ -тої точки співпадає з роботою по переміщенню  $i$ -тої точки в полі нерухомої  $j$ -тої точки. Це ілюструє висновок (3.35) про те, що робота центральної сили на переміщенні  $d\mathbf{r}_{ij}$  може бути представлена як спад потенціальної енергії  $j$ -

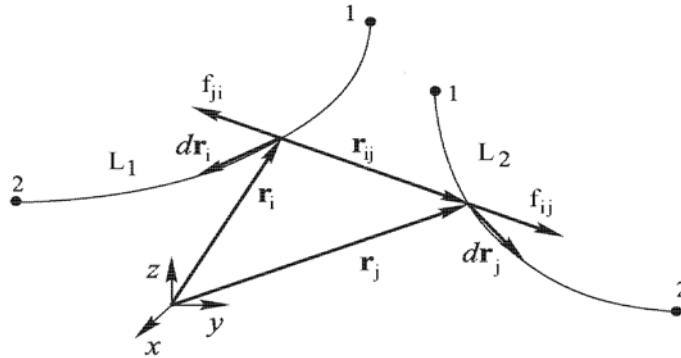


Рис. 3.11. До пояснення співвідношень (3.35) і (3.36)

тої точки в полі нерухомої  $i$ -тої точки, або як спад потенціальної енергії  $i$ -тої точки в полі нерухомої  $j$ -тої точки. Тобто, це є спад потенціальної енергії взаємодії двох точок, коли змінюється їх взаємне розташування одна відносно одної (рис. 3.11).

Узагальнюючи (3.35) на всю систему точок, отримаємо:

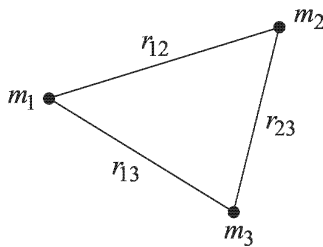
$$\delta A = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} dU_{ij} = -dU. \quad (3.37)$$

Множник  $1/2$  введений тут для того, щоб не враховувати двічі взаємодію одних і тих же точок, згідно з отриманим в рівнянні (3.36). Останнє рівняння – це представлення потенціальної енергії взаємодії точок в симетричному виді. **Наприклад** [13], потенціальну енергію трьох точок можна представити так:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23},$$

де  $U_{12}$  – потенціальна енергія взаємодії 1 і 2 точок,  $U_{13}$  – потенціальна енергія взаємодії 1 і 3 точок,  $U_{23}$  – 2 і 3 точок. Представимо це в симетричному виді, вважаючи, що взаємодія між частинками здійснюється за гра-

вітаційним законом (рис. 3.12). Потенціальна енергія першої точки в полі другої і третьої точок:



**Рис. 3.12. Розрахунок потенційної енергії взаємодії точок**

$$U_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}}.$$

Для другої точки в полі першої і третьої:

$$U_2 = -G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G \frac{m_2 m_1}{r_{21}}.$$

Для третьої в полі першої і другої:

$$U_3 = -G \frac{m_3 m_1}{r_{31}} - G \frac{m_3 m_2}{r_{32}}.$$

Очевидно,

$$r_{12} = r_{21}; r_{13} = r_{31}; r_{23} = r_{32}; U_{21} = U_{12}; U_{13} = U_{31}; U_{23} = U_{32}.$$

Відповідно до (3.37)

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2 + U_3) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

Для скінченної зміни конфігурації системи маємо:

$$A = -\Delta U. \quad (3.38)$$

Тобто, робота внутрішніх консервативних сил дорівнює зменшенню власної потенціальної енергії системи. Кожна конфігурація системи має своє значення власної потенціальної енергії, і робота всіх внутрішніх консервативних сил, коли змінюється конфігурація, дорівнює спаду власної потенціальної енергії.

### 3.9 Закон збереження енергії системи взаємодіючих точок

Нехай система взаємодіючих матеріальних точок знаходиться в зовнішньому силовому полі. В цьому випадку на кожну точку такої системи діють і внутрішні і зовнішні сили, консервативні і неконсервативні.

Повну роботу  $A_{\Sigma}$  усіх сил, що діють на точки системи можна представити у вигляді суми робіт внутрішніх консервативних  $A_{(к)}^{in}$ , дисипативних  $A_{(d)}^{in}$  і зовнішніх сил  $A^{ex}$ :

$$A_{\Sigma} = A_{(к)}^{in} + A_{(d)}^{in} + A^{ex}. \quad (3.39)$$

Як встановлено вище для однієї матеріальної точки, приріст її кінетичної енергії дорівнює роботі усіх сил, що діють на точку:

$$\Delta T_i = A_{i,\Sigma}.$$

Підсумовуючи це співвідношення по всіх точках системи, отримаємо, що приріст кінетичної енергії системи дорівнює роботі усіх сил, що діють на усі точки:

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_i = A_{\Sigma} = A_{(к)}^{in} + A_{(d)}^{in} + A^{ex}.$$

Для роботи внутрішніх консервативних сил було отримано (3.38), що

$$A_{(к)}^{in} = -\Delta U,$$

тобто дорівнює спаду потенціальної енергії системи. Враховуючи це, отримуємо:

$$\Delta T + \Delta U = A_{(d)}^{in} + A^{ex}, \quad (3.40)$$

або

$$\begin{aligned} \Delta E &= A_{(d)}^{in} + A^{ex}; \\ \frac{dE}{dt} &= \mathbb{P}_{(d)}^{in} + \mathbb{P}^{ex}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

де  $E = T + U$  – повна механічна енергія системи, яка складається з кінетичної енергії точок і власної потенціальної енергії їх взаємодії. Останній вираз в (3.41) означає, що похідна за часом від повної енергії – це сума потужностей внутрішніх дисипативних і зовнішніх сил.

Якщо  $A_{(d)}^{in} + A^{ex} = 0$ , то  $\Delta E = 0$ ,  $E = \text{const}$  – повна енергія системи точок за відсутності внутрішніх дисипативних і зовнішніх сил зберігається. Та-



ким чином, якщо незамкнута механічна система знаходиться в зовнішньому стаціонарному потенціальному полі (у зовнішньому консервативному полі) і якщо внутрішні сили консервативні, то повна механічна енергія системи зберігається.

У разі ізолюваної системи матеріальних точок  $A^{ex} = 0$ . Тоді маємо:

$$\Delta E = A_{(d)}^{in}. \quad (3.42)$$

Оскільки робота дисипативних сил від'ємна,  $A_{(d)}^{in} < 0$ , то в ізолюваній системі матеріальних точок, де діють дисипативні сили, повна механічна енергія системи не зберігається, повна механічна енергія завжди зменшується. Якщо в ізолюваній системі точок дисипативних сил немає, то  $\Delta E = 0$ ,  $E = \text{const}$ .

Отже, можна сформулювати, що в інерціальній системі відліку повна механічна енергія ізолюваної системи, що складається з довільного числа взаємодіючих точок, в якій відсутні дисипативні сили, зберігається.

У разі нестаціонарного зовнішнього поля зовнішні сили є неконсервативними [22], навіть якщо вони потенціальні:

$$A_{1,2} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Оскільки робота сили – це приріст кінетичної енергії,  $A_{1,2} = T_2 - T_1$ , то маємо:

$$T_2 - T_1 = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt;$$

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Повна механічна енергія системи в зовнішньому нестаціонарному потенціальному полі не зберігається

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Відсутність збереження повної енергії не зв'язане з дисипацією енергії, це обумовлено нестационарною потенціальною енергією точок в такому полі.

Дисипативні сили призводять до перетворення механічної енергії на певну кількість теплоти. Тому закон збереження механічної енергії є частковим випадком загального закону збереження і перетворення енергії усіх форм руху матерії [1,6,14,22]: енергія ніколи не створюється і не знищується. Вона може тільки переходити з однієї форми в іншу або обмінюватися між окремими частинами матерії. У окремому випадку механіки закон збереження механічної енергії являє собою закон перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки.

### 3.10 Теорема Кеніга

З рівняння для кінетичної енергії виходить, що ця величина залежить від вибору системи відліку, відносно якої розглядається рух. Як перетвориться кінетична енергія, якщо здійснити перехід з однієї системи відліку в іншу? Розглянемо це перетворення для довільної системи матеріальних точок. Кінетична енергія системи матеріальних точок – це величина

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}. \quad (3.43)$$

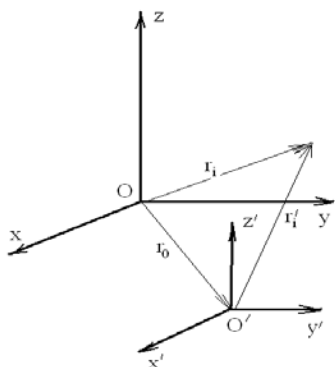
Розглянемо дві системи відліку (рис. 3.13) [2]. Позначимо радіус-вектор довільної точки відносно лабораторної системи  $O$  через  $\mathbf{r}_i$ , радіус-вектор цієї ж точки відносно точки  $O'$ , початку системи координат  $x', y', z'$  – через  $\mathbf{r}'_i$ , а радіус-вектор, що з'єднує точки  $O, O'$  позначимо через  $\mathbf{r}_0$ . У будь-який момент часу

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'_i$$

Тоді для кінетичної енергії системи матеріальних точок відносно точки О отримуємо:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_0^2}{2} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2}{2} = \\ &= T' + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \dot{\mathbf{r}}_0 = T' + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \dot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{P}', \end{aligned}$$



де

$$T' = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2}{2}; \quad \mathbf{P}' = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i; \quad \dot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{P}' = M \dot{\mathbf{r}}_0 \dot{\mathbf{r}}'_C,$$

$T'$  – це кінетична енергія точок відносно системи  $O'$ ; доданок  $\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_0^2$  – кінетична енергія точок від-

**Рис. 3.13.** До виведення теореми Кеніга

носного руху системи точок як цілого відносно системи  $O$ ; доданок  $\dot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{P}' = M \dot{\mathbf{r}}_0 \dot{\mathbf{r}}'_C$  залежить від співвідношення швидкостей системи відліку і точки центру мас частинок в цій системі відносно точки  $O$ .

Розглянемо випадок, коли початок системи  $O'$  знаходиться в центрі мас системи матеріальних точок. В цьому випадку  $\dot{\mathbf{r}}'_C = 0$ , сумарний імпульс часток в  $C$ -системі дорівнює нулю, і остаточно отримуємо:

$$T = T' + \frac{M \dot{\mathbf{r}}_0^2}{2} = T' + \frac{M \dot{\mathbf{r}}_C^2}{2} = T' + \frac{M V_C^2}{2}. \quad (3.44)$$

Це означає, що кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії її руху як цілого із швидкістю, рівною швидкості центру мас, і кінетичної енергії точок по відношенню до центру мас. Це твердження називають теоремою Кеніга. З (3.44) виходить, що кінетична енергія системи частинок мінімальна в  $C$ -системі (відсутній доданок  $\frac{M \dot{\mathbf{r}}_0^2}{2}$ ).

Величину  $E' = T' + U$  – суму кінетичної енергії відносно центру мас і потенціальної енергії взаємодії точок – називають внутрішньою енергією системи точок [5]. Додавши  $U$  в ліву і праву частині (3.44), отримаємо перетворення власної механічної енергії:

$$E = E' + \frac{MV_C^2}{2}. \quad (3.45)$$

Якщо система матеріальних точок замкнута, то  $\Delta E = \Delta E'$ , тобто приріст власної енергії дорівнює приросту внутрішньої енергії, оскільки у замкнутій системі часток  $V_C = 0$ . Для консервативної системи її повна енергія зберігається в усіх ІСВ, що відповідає принципу відносності Галілея.

**Приклад** [6]. Розглянемо обруч маси  $m$ , радіусу  $R$ , який котиться по гладкій горизонтальній поверхні без ковзання із швидкістю  $v_0$ . Повна кінетична енергія обруча в лабораторній системі координат згідно з теоремою Кеніга дорівнює:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + T' = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = mv_0^2.$$

### 3.11 Зіткнення двох тіл

Основний інтерес для розгляду питань зіткнення полягає в тому, щоб встановити зв'язок між характеристиками стану тіл до і після зіткнення без детального розгляду того, як цей зв'язок може бути здійснений. Це наочний приклад використання законів збереження, які уможливають описання загальних властивостей самого процесу, не вдаючись до подробиць конкретних законів взаємодії тіл. Інструментом дослідження такої взаємодії служать закони збереження імпульсу і енергії.

**Ударом** двох тіл назвемо короткочасну взаємодію тіл, коли вони стикаються, і сукупність усіх явищ, що виникають внаслідок цього. Зіткнення

твердих тіл викликає пружні і пластичні деформації тіл, сили тертя, в тілах виникають коливання і хвилі, тіла можуть нагріватися, частково руйнуватися. Кінетична енергія, яку мали тіла перед ударом, частково або повністю переходить в потенціальну енергію пружної деформації, у внутрішню енергію тіл, що призводить до їх нагрівання [3, 6].

Розрізняють два граничні випадки взаємодії у вигляді удару, залежно від характеру зміни внутрішньої енергії тіл, що зіткнулися: **абсолютно пружний і абсолютно непружний удар**.

**Абсолютно пружний удар** – такий удар, під час якого механічна енергія тіл не переходить в інші, немеханічні види енергії. Внаслідок такого удару кінетична енергія переходить повністю або частково в потенціальну енергію пружної деформації, потім тіла повертаються до первинної форми і утворюються сили відштовхування, які призводять до розлітання вже недеформованих тіл. В результаті енергія пружної деформації знову переходить в кінетичну енергію, тіла розлітаються. Кінетична енергія недеформованих тіл знову набуває початкового значення, яке було до удару. В реальних тілах цей процес ускладнюється виникненням пружних збурень, що поширюються із звуковою швидкістю, випромінюванням звукових хвиль, супроводжується внутрішнім тертям і залишковими деформаціями. Ця частина енергії переходить у внутрішню енергію [2].

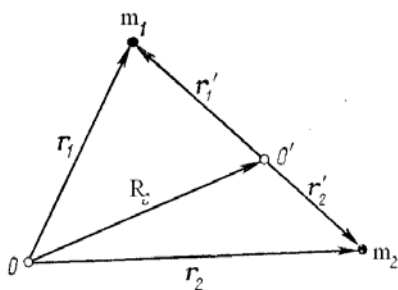
**Абсолютно непружний удар** характеризується тим, що потенціальна енергія деформації не виникає, кінетична енергія тіл повністю або частково перетворюється на внутрішню енергію, після зіткнення тіла або рухаються з однаковою швидкістю, або знаходяться в стані спокою [1, 2, 5].

Під зіткненням мікрочастинок – атомів, молекул, атомних ядер, іонів – розуміють не лише звичайне зіткнення, але і будь-яку взаємодію, що описується за допомогою центральних сил [6, 19]. В цьому випадку вважається, що частинки для взаємодії приходять з нескінченності, тобто з нескін-

ченно великої відстані, де вони не взаємодіють, або цією взаємодією можна нехтувати. Потім вони зближуються, взаємодіють і або розходяться знову на нескінченність, або зупиняються на скінченній відстані одна від одної, якщо взаємодія носить характер притягання. У першому випадку це розсіяння частинок, в другому – захоплення частинок. Таким чином, розгляд взаємодії частинок не передбачає їх зіткнення, такого як зіткнення тіл скінченного розміру.

Нас цікавитиме зміна напрямку або характеру руху внаслідок взаємодії. Зіткнення частинок назвемо пружним, якщо в результаті їх взаємодії не змінюється внутрішня енергія частинок, а змінюються тільки їх швидкості. Якщо в результаті взаємодії змінюється їх внутрішній стан або відбувається перетворення одних частинок на інші, то це непружні зіткнення.

Підсумовуючи, можна сказати наступне. Якщо відбувається пружні взаємодії, у тому числі, зіткнення, сумарна кінетична енергія тіл (частинок), що взаємодіють, зберігається, тобто, сумарна кінетична енергія «до» і «після» взаємодії однакова. Під час непружних зіткнень сумарна кінетична енергія не зберігається, оскільки частина енергії переходить в інші види (теплоту). Під час будь-яких взаємодій зберігається імпульс і повна енергія, з урахуванням її переходу в інші види (нагрівання).



**Рис. 3.14.** Система центру мас

Для розгляду різних видів зіткнення двох тіл використовуватимемо закони збереження імпульсу і енергії, і вважатимемо, що система тіл або точок, що взаємодіють, замкнена. Аналіз взаємодії проведемо в двох інерціальних системах відліку: лабораторній і С-системі (системі центру мас).

Розглянемо дві точки масами  $m_1$ ,  $m_2$ . Розташування цих точок відносно точки  $O$  – початку системи координат лабораторної системи відліку – ха-

рактизуватимемо радіус-векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  відповідно. Радіус-вектор центру мас  $\mathbf{R}_C$  цих двох частинок за визначенням є

$$\mathbf{R}_C = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.46)$$

Знайдемо тепер положення цих точок відносно точки  $O'$  – центру системи координат С-системи відліку. Введемо радіус-вектори  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$  першої і другої точок відносно точки  $O'$  (рис. 3.14). У будь-який момент часу

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}'_1; & \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_C; \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}'_2; & \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_C. \end{cases}$$

Підставимо в останній вираз значення  $\mathbf{R}_C$  з (3.46):

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}; & \mathbf{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \\ \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}; & \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{cases} \quad (3.47)$$

Як відомо, в С-системі сумарний імпульс точок відносно цієї системи дорівнює нулю. Визначимо імпульс кожної точки відносно С-системи із швидкостями точок  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  в лабораторній системі. Оскільки

$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}; \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$ , то, використовуючи (3.47), отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 = \dot{\mathbf{r}}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2); \\ \mathbf{v}'_2 = \dot{\mathbf{r}}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Імпульс точок  $m_1, m_2$  відносно С-системи буде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_1 &= m_1 \mathbf{v}'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2); \\ \tilde{\mathbf{p}}_2 &= m_2 \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Звідси видно, що

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 &= 0; \\ |\tilde{\mathbf{p}}_1| &= |\tilde{\mathbf{p}}_2|.\end{aligned}\tag{3.50}$$

як і виходить з визначення системи центру мас. Отримане співвідношення справедливе для будь-якого числа точок і має той же вигляд незалежно від замкнутості системи і характеру взаємодії між частинками. Введемо величину

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},\tag{3.51}$$

що називається зведеною масою системи точок і визначається за правилом

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

З використанням (3.51) вираз (3.49) для імпульсу точок приймає вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}_1 &= \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2); \\ \tilde{\mathbf{p}}_2 &= \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).\end{aligned}\tag{3.52}$$

Знайдемо вираз для кінетичної енергії точок в С-системі:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} = \frac{m_1 v_1'^2}{2m_1} = \frac{\mu^2}{2m_1} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2; \\ \tilde{T}_2 &= \frac{\tilde{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} = \frac{m_2 v_2'^2}{2m_2} = \frac{\mu^2}{2m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2; \\ \tilde{T} &= \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \frac{\mu}{2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2.\end{aligned}\tag{3.53}$$

Далі вважатимемо, що початкова система К інерціальна, система точок замкнута, потенціальною енергією взаємодії можна нехтувати.

Розглянемо **абсолютно непружну взаємодію**. В результаті непружного зіткнення обидві частинки злипаються, як би склеюються і далі рухаються як єдине ціле. Прикладом для опису зіткнення реальних тіл може служити попадання кулі в ящик з піском, який підвішений на вірьовках. Куля застряє в піску і далі система у вигляді ящика з піском і застряглою кулею рухається разом. Для такої взаємодії виконується лише закон збереження



імпульсу, а закон збереження енергії не виконується.

Нехай в К-системі дві частинки масами  $m_1$  і  $m_2$  до зіткнення мають швидкість  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , тоді їх імпульси  $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$ . Нехай рух до взаємодії відбувається уздовж прямої, що з'єднує ці частинки (аналог для тіл – куль, що стикаються – уздовж прямої, що з'єднує їх центри). Таке зіткнення називають **центральною**. Після зіткнення утворюється частинка масою  $m_1 + m_2$ , яка рухається із швидкістю  $\mathbf{V}'$ . Із закону збереження імпульсу виходить, що

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2; \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}'. \quad (3.54)$$

Звідси знаходимо:

$$\mathbf{V}' = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Для рішення конкретних задач треба (3.54) проектується на осі вибраної системи координат.

Кінетична енергія до удару

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Після удару

$$T'_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left( \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Частина цієї енергії («втрата») перейшла в тепло

$$\Delta T = T_1 - T'_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2. \quad (3.55)$$

Таким чином, для абсолютно непружного зіткнення двох тіл відбувається втрата кінетичної енергії макроскопічного руху, яка дорівнює половині добутку зведеної маси на піднесену до квадрату відносну швидкість. Отже, під час непружного зіткнення в системі діють дисипативні сили, які зменшують кінетичну енергію макроскопічного руху. Застосовувати закон збе-

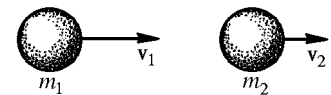
реження енергії в його механічній формі до процесів, що відбуваються під час удару, не можна. Але після закінчення удару (коли тіла з'єдналися і рухаються як одно ціле) можна використати закон збереження енергії.

Розглянемо те ж саме в системі центру мас. У системі центру мас це виглядає таким чином. До зіткнення обидві частинки (обидва тіла) рухаються один назустріч одному з однаковими імпульсами  $|\tilde{\mathbf{p}}_1| = |\tilde{\mathbf{p}}_2|$ , а після зіткнення частинка (тіло), що утворилася, нерухома. Сумарна кінетична енергія  $\tilde{T}$  (3.53) цілком переходить у внутрішню енергію частинки, що утворилася  $\tilde{T} = Q$ :

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\tilde{p}^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{\tilde{p}^2}{2\mu} \\ &= \frac{\mu^2}{2\mu} (v_2 - v_1)^2 = \frac{\mu}{2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Отже, величина  $Q$  залежить тільки від відносної швидкості для даної пари частинок або даної пари взаємодіючих тіл.

Розглянемо **абсолютно пружний удар** [2]. Це таке зіткнення, коли внутрішня енергія точок не змінюється, а тому не змінюється і кінетична енергія системи. Простий випадок такого зіткнення – центральне або лобове зіткнення. В цьому випадку частинки (тіла) до і після зіткнення рухаються по одній і тій же прямій. Розглянемо цей процес на прикладі зіткнення двох куль. Нехай до зіткнення швидкості куль в лабораторній К-системі дорівнюють  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , кулі



**Рис.3.15. До пружного зіткнення двох куль**

рухаються або одна назустріч одній, або одна куля наздоганяє іншу. Знайдемо швидкості куль  $\mathbf{v}'_1$ ,  $\mathbf{v}'_2$  після зіткнення.

Із закону збереження імпульсу і енергії в лабораторній К-системі отримаємо:

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2; \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}. \end{cases} \quad (3.57)$$

Оскільки одне рівняння лінійне, а друге – квадратичне, отримана система рівнянь повинна мати два рішення відносно  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ . Тривіальне рішення  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2$  не задовольняє, оскільки цьому рішенню відповідає випадок відсутності взаємодії. Вимагатимемо, щоб швидкості змінилися. Перепишемо ці рівняння в скалярному вигляді, вважаючи, що рух відбувається уздовж прямої і відповідає рис. 3.15:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2); & m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2); \\ m_1(v_1 - v'_1)^2 = m_2(v'_2 - v_2)^2; & m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2). \end{cases}$$

Оскільки  $v'_1 \neq v_1; v'_2 \neq v_2$ , ділимо одне рівняння на інше і отримуємо:

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2.$$

Розв'язуючі останнє рівняння спільно з рівнянням закону збереження імпульсу, отримуємо:

$$v'_1 = -v_1 + 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad v'_2 = -v_2 + 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.58)$$

У окремому випадку – для  $m_1 = m_2$  – тіла обмінюються швидкостями:

$$v'_1 = v_2; \quad v'_2 = v_1.$$

У системі центру мас обидві кулі до і після зіткнення мають однакові по модулю і протилежні за напрямом імпульси:

$\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  – до,  $\tilde{p}'_1, \tilde{p}'_2$  – після. Або:

$$\begin{cases} m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 = m_1 \tilde{v}'_1 + m_2 \tilde{v}'_2 = 0; \\ \frac{1}{2} m_1 \tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \tilde{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \tilde{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \tilde{v}'_2{}^2. \end{cases}$$

Використовуємо позначення

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2^2 = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2;$$

$$\tilde{T}' = \frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2'^2 = \tilde{T}_1' + \tilde{T}_2'.$$

Для рівняння закону збереження енергії отримуємо в цьому випадку:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \tilde{T}_1' + \tilde{T}_2' = \tilde{T}'; \\ \tilde{T} &= \tilde{T}'.\end{aligned}$$

З іншого боку:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\tilde{p}_1^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{\mu}{2}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)^2; \\ \tilde{T}' &= \tilde{T}_1' + \tilde{T}_2' = \frac{\tilde{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2'^2}{2m_2} = \frac{\tilde{p}_1'^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{\mu}{2}(\tilde{v}_1' - \tilde{v}_2')^2.\end{aligned}$$

Імпульс кожної частинки в результаті зіткнення змінить тільки напрямок на протилежний, не змінюючись за модулем:

$$\tilde{\mathbf{p}}_i' = -\tilde{\mathbf{p}}_i, \quad i = 1, 2.$$

Те ж саме відноситься і до швидкості:

$$\tilde{\mathbf{v}}_i' = -\tilde{\mathbf{v}}_i.$$

Повертаючись в лабораторну  $K$  - систему, отримуємо:

$$\tilde{\mathbf{v}}_1' = 2\mathbf{V}_C - \mathbf{v}_1; \quad \tilde{\mathbf{v}}_2' = 2\mathbf{V}_C - \mathbf{v}_2. \quad (2.59)$$

Для чисельних розрахунків необхідно рівняння спроектувати на відповідні осі координат.

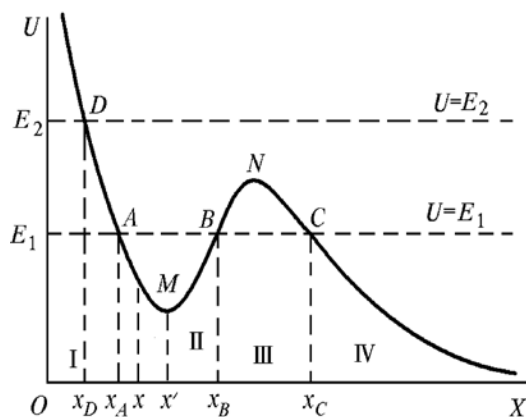
### 3.12 Одновимірний рух точки в полі консервативних сил

Розглянемо матеріальну точку, що рухається в одновимірному полі консервативних сил, де дисипативні сили відсутні. Закон збереження енергії виконується, повна механічна енергія точки зберігається:  $E = T + U = \text{const}$ . Закон збереження енергії уможливорює виконання простого аналізу загаль-

них закономірностей руху точки без детального знання її рівняння руху, якщо відомий закон зміни потенціалу, тобто потенціальної енергії. Кінетична енергія за своїм сенсом не може бути від'ємною величиною, тому  $E \geq U(x)$ , і цим співвідношенням визначається область зміни координати точки тобто, межі її руху, в якій вона може знаходитися, якщо задана повна енергія  $E$ . Під час руху в полі консервативних сил будь-яка сила, залежна тільки від координат, є консервативною [1,2,5,6,22]. Знаходження потенціальної енергії зводиться до обчислення інтеграла від відомої сили і завжди можливо, якщо явно задана сила. Тому можна вважати закон зміни потенціальної енергії відомим:

$$U(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + C.$$

Нехай точка рухається по прямій лінії уздовж координати  $x$ . На осі  $x$  функція  $U = U(x)$ . Нехай графік функції  $U(x)$  має вигляд, показаний на рис. 3.16. Проведемо на цьому рисунку горизонтальну пряму  $U = E_1$ , де  $E_1$



**Рис. 3.16. Залежність потенціальної енергії частинки від координати**

— постійна величина, що дорівнює повній енергії точки в полі консервативної сили. Ця пряма перетинає потенціальну криву  $U(x)$  в трьох точках  $A$ ,  $B$ , і  $C$  з координатами  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  відповідно. Повна енергія

точки  $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$ . Звідси отри-

муємо  $\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0$ , оскільки

кінетична енергія завжди додатна величина. Отже, точка, що має повну енергію  $E_1$ , не може знаходитися в областях I і III. Вона може рухатися або в області II, або в області IV. Насправді, за законом збереження енергії,

кінетична енергія точки  $\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0$ , тому допустимими областями руху є лише ті, в яких кінетична енергія – додатна величина, тобто повна енергія  $E \geq U(x)$ . Під час руху в області I кінетична енергія від’ємна,  $\frac{m\dot{x}^2}{2} < 0$ , що неможливо. Аналогічно для області III. Тому точка може рухатися в областях II, IV. Переходити з області II в область IV і навпаки точка теж не може. Цією перешкодою є потенціальний бар’єр BNC на потенціальній кривій.

Проаналізуємо рух точки в області II на відрізку  $[x_A, x_B]$ . У будь-якій довільній точці  $x \in [x_A, x_B]$  її кінетична енергія  $\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0$ , і рухається вона може як вправо, так і вліво. Припустимо, точка рухається ліворуч від точки M – точки мінімуму потенціальної енергії. Під час руху вліво її потенціальна енергія зростає, кінетична убыває, оскільки повна енергія  $E = \text{const}$ . Отже, швидкість частинки зменшується. Сила, що діє на точку, спрямована вправо, оскільки  $F_x = -\frac{dU}{dx}$ . У точці x потенціальна енергія убыває із зростанням x,  $\frac{dU}{dx} < 0$ , а  $F_x = -\frac{dU}{dx} > 0$ , сила діє вправо. Точка рухається вліво, поки її швидкість  $\dot{x}$  не стане рівною нулю. Під час руху повна енергія точки перейде в потенціальну в точці з координатою  $x_A$ . Але в цій точці частинка не може залишатися у стані спокою, оскільки на неї діє сила, спрямована вправо. Під дією цієї сили частинка почне рухатися вправо із зростаючою швидкістю, максимум якою буде в точці  $x'$ , яка відповідає координаті точки M – мінімальному значенню потенціальної енергії. На відрізку від  $x' = x_{\min}$  до точки B з координатою  $x_B$  на частинку буде діяти сила, спрямована вліво, яка зменшує її швидкість до нуля в точці  $x_B$ .

Потім частинка почне рухатися вліво і так далі. На всьому проміжку  $[x_A, x_B]$  існує лише одна точка, де частинка може знаходитися в стані спокою – це точка з  $U = U_{\min}$ , тобто в точці, де її потенціальна енергія набуває мінімального значення, що є умовою стійкої рівноваги. Таким чином, частинка є замкнутою в області II і здійснює в цій області **фінітний** рух, тобто рух в обмеженій області простору. У області II вона опиняється в потенціальній ямі і в цій області здійснює коливальні рухи між точками, які називаються точками зупинки.

У області III частинка може рухатися від точки  $x_C$  до нескінченості. Частинка, досягнувши  $x_C$ , поверне назад, і далі йтиме на нескінченність. Такий рух називають **інфінітним** (необмеженим). З області потенціальної ями II частинка не може проникнути в область IV через наявність потенціального бар'єру. У класичній механіці потенціальний бар'єр є абсолютною перешкодою для руху частки.

Якщо точка має більшу енергію  $E_2 > E_1$  і горизонтальна пряма  $U = E_2$  перетинає потенціальну криву в єдиній точці D з координатою  $x_D$ , то для точки виявляється доступна вся область простору правіше точки D. Рух в тій області буде інфінітним.

Конкретні приклади потенціальних кривих, що теоретично моделюють реальні взаємодії, розглядатимуться нижче у відповідних розділах.

### 3.13 Релятивістська енергія

#### 3.13.1 Часова компонента 4-імпульсу

Всі міркування, викладені вище відносно роботи сили, консервативних сил, потенціальної енергії – справедливі і для рухів із швидкостями, близькими до швидкостей світла, оскільки швидкість, з якою рухається тіло,

була несуттєвою.

Раніше ми встановили, що простором СТВ є 4-вимірний простір Мінковського (див. підрозділ 1.16 і подальші). У цьому просторі матеріальна точка рухається по світовій лінії, і положення її в просторі описують 4-радиус-вектором (1.65, 1.66):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}(ct, x, y, z) = \mathbf{R}(ct, \mathbf{r}).$$

Введено поняття 4-вектора швидкості (2.65):

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}\left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}\right) = \mathbf{V}(v_0, v_1, v_2, v_3),$$

або

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = \mathbf{V}(v_0, v_1, v_2, v_3) = \mathbf{V}(c\gamma, \mathbf{v}\gamma).$$

За аналогією з класичним імпульсом ввели поняття 4-імпульсу (2.68):

$$\mathbf{P}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \mathbf{P}(mc\gamma, mv_x\gamma, mv_y\gamma, mv_z\gamma) = \mathbf{P}(mc\gamma, m\mathbf{v}\gamma),$$

що складається з часової і просторової компонент. Отримано релятивістське рівняння руху (2.70, 2.73, 2.74) для просторової частини релятивістського 4-імпульсу:

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{F}; \quad \frac{d}{dt}(mv_i\gamma) = F_i; \quad \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right); \quad \beta = \frac{v}{c},$$

у якому

$$\mathbf{F}(f_0, f_1, f_2, f_3) = \mathbf{F}(f_0, f_x, f_y, f_z)$$

є 4-вимірна сила, де  $f_0$  – часова компонента 4-сили, що визначається за правилом (2.71):

$$f_0 = \frac{d}{d\tau}(mc\gamma) = \gamma \frac{d}{dt}(mc\gamma).$$

Зупинимося детальніше на часовій компоненті 4-сили з тим, щоб до отриманого релятивістського рівняння руху для просторової частини 4-імпульса, додати рівняння для його часової частини.



Відомо, що квадрат довжини будь-якого 4-вектора є інваріантом (див. 2.62). Тому для будь-якого 4-вектора з компонентами  $\mathbf{A}(A_0, A_1, A_2, A_3)$

$$A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = \text{inv}.$$

Зокрема, для 4-вектора швидкості  $\mathbf{V}(v_0, v_1, v_2, v_3)$  маємо (2.67):

$$v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = c^2.$$

Для виведення необхідних співвідношень від обох частин останнього виразу обчислимо похідну за  $d\tau$  – за власним часом частки [4, 15, 17, 26]:

$$v_0 \frac{dv_0}{d\tau} - v_1 \frac{dv_1}{d\tau} - v_2 \frac{dv_2}{d\tau} - v_3 \frac{dv_3}{d\tau} = 0. \quad (3.60)$$

Врахувавши, що компоненти 4-вектору швидкості визначаються за (2.65), а компоненти 4-сили даються (2.71), знайдемо з (2.71):

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{m} &= \frac{d}{d\tau}(\gamma c) = \frac{dv_0}{d\tau}; \\ \frac{f_i}{m} &= \frac{d}{d\tau}(\gamma v_i) = \frac{dv_i}{d\tau}; \quad i = x, y, z. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Отриманий в (3.61) вираз підставимо в інваріант (3.60), що був диференційований:

$$c\gamma \frac{f_0}{m} - \gamma v_x \frac{f_x}{m} - \gamma v_y \frac{f_y}{m} - \gamma v_z \frac{f_z}{m} = 0.$$

Використовуючи визначення (2.72), останнє можна записати таким чином:

$$c\gamma \frac{f_0}{m} - \gamma v_x \frac{\gamma F_x}{m} - \gamma v_y \frac{\gamma F_y}{m} - \gamma v_z \frac{\gamma F_z}{m} = 0. \quad (3.62)$$

Скоротимо в (3.62) на  $\gamma$  і  $m$  та перепишемо у вигляді:

$$cf_0 = \gamma v_x F_x + \gamma v_y F_y + \gamma v_z F_z,$$

або

$$f_0 = \frac{\gamma}{c}(\mathbf{vF}). \quad (3.63)$$

Отже, визначено вираз для часової (нульовий) складової 4-сили. У остато-

чному виді 4-вектор сили має такі компоненти:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\gamma}{c}(\mathbf{F}\mathbf{v}), & \gamma F_x, & \gamma F_y, & \gamma F_z \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}(\mathbf{F}\mathbf{v}), & \gamma \mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Звідси для нульової компоненти релятивістського рівняння руху отримуємо, використовуючи (2.71):

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{dp_0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(mc\gamma) = \gamma \frac{d}{dt}(mc\gamma) = \frac{\gamma}{c}(\mathbf{F}\mathbf{v}); \\ \gamma \frac{d}{dt}(mc\gamma) &= \frac{\gamma}{c}(\mathbf{F}\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

У остаточному вигляді маємо:

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = \mathbf{F}\mathbf{v}, \quad (3.66)$$

Справа в (3.66) стоїть потужність звичайної 3-вимірної сили, тобто робота в одиницю часу. Тоді в лівій частині по аналогії з класичною механікою стоїть зміна енергії вільної частинки. Звідси можна розуміти сенс нульової компоненти 4-вектору імпульсу. Це повна енергія вільної точки, що поділена на швидкість світла:

$$p_0 = m\gamma c = \frac{m\gamma c^2}{c} = \frac{E}{c}.$$

Отже, усі компоненти 4-вектора імпульсу визначені і 4-вектор імпульсу має вигляд:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m\gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{P}(m\gamma c, m\gamma \mathbf{v}). \quad (3.67)$$

Повна енергія вільної частинки записується у вигляді

$$E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.68)$$

Оскільки нульова (часова) компонента 4-імпульсу, як було встановлено,

пов'язана з енергією частинки, 4-вектор імпульсу називають 4-вектором енергії-імпульсу. Його записують, як

$$\mathbf{P}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right); E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\mathbf{v}\gamma.$$

Рівняння руху в релятивістській механіці – його просторова і часова частини – мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}; \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \mathbf{F}\mathbf{v}. \quad (3.69)$$

У рівняння (3.69) входять тільки 3-вимірні вектори. Оскільки релятивістський імпульс – 4-вектор, з його визначення автоматично виходить, що сума квадратів його компонент є інваріантом:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \text{inv}; E^2 - p^2 c^2 = \text{inv}. \quad (3.70)$$

Знайдемо величину цього інваріанту. Довжина будь-кого 4-вектора виражається через суму квадратів його компонентів:

$$P^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2.$$

Підставимо сюди явний вид компонент 4-вектора імпульсу з (3.67), і отримаємо

$$P^2 = (m\gamma c)^2 - (m\gamma v_x)^2 - (m\gamma v_y)^2 - (m\gamma v_z)^2 = (m\gamma)^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2.$$

Отже, величина інваріанту (3.70) є

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2. \quad (3.71)$$

З визначення 4-векторів виходять закони перетворення їх компонент коли одна інерціальна система відліку  $K$  переходить в іншу інерціальну систему відліку  $K'$  і навпаки. Нехай в системі  $K$  4-імпульс точки має компоненти

$$\mathbf{P}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \mathbf{P}(p_0, p_1, p_2, p_3).$$

У системі  $K'$  4-імпульс частки має вигляд:

$$\mathbf{P}'\left(\frac{E'}{c}, \mathbf{p}'\right) = \mathbf{P}'(p'_0, p'_1, p'_2, p'_3).$$

Нехай система відліку  $K'$  рухається відносно системи  $K$  зі швидкістю  $V$  уздовж осі  $x$ . Тоді, згідно (2.60), маємо:

$$p'_0 = \Gamma(p_0 - \beta p_1); \quad p'_1 = \Gamma(p_1 - \beta p_0); \quad p'_2 = p_2; \quad p'_3 = p_3; \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Або

$$p'_0 = \frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{V}{c} p_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad E' = \frac{E - V p_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad p'_1 = p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c} \frac{E}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{p_x - \frac{V}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad (3.72)$$

$$p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z.$$

Використовуючи матрицю перетворення Лоренца (1.69, 1.70), останні співвідношення можна переписати таким чином:

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\beta\Gamma & 0 & 0 \\ -\beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & \beta\Gamma & 0 & 0 \\ \beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

### 3.13.2 Робота сили і енергія точки

Як випливає з (3.68), енергія вільної точки в релятивістському випадку визначають за співвідношенням:

$$E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

З (3.66) виходить, що

$$\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v},$$

тобто похідна за часом від енергії точки дорівнює потужності усіх зовнішніх сил, що діють на точку, в повній аналогії з класичною нерелятивістською механікою. Останній вираз може бути переписаний таким чином:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\delta A}{dt} = \frac{dE}{dt}. \quad (3.74)$$

Отже,  $dE = \delta A$ , тобто зміна (приріст) енергії точки дорівнює елементарній роботі, що здійснюються зовнішніми силами над точкою. Робота по переміщенню частинки з точки 1 в точку 2 простору дорівнює різниці енергій частинки в точках 2 і 1:

$$A_{1,2} = E_2 - E_1.$$

З отриманого визначення енергії точки видно: якщо  $v=0$ , тобто у тому випадку, коли вільна точка знаходиться в стані спокою, ця точка має енергію

$$E_0 = mc^2. \quad (3.75)$$

Ця енергія пропорційна масі точки і її називають енергією спокою. У цьому співвідношенні проявляється абсолютно нова властивість маси: маса  $m$  тіла визначає запасену в ньому енергію  $E_0$ , що істотно відрізняє її від маси в класичній механіці Ньютона. Формула (3.75) справедлива для будь-якого тіла, що знаходиться у стані спокою як ціле. Маса спокою визначає повний зміст енергії в ньому незалежно від того, яке походження цієї енергії. Інерція тіла виявляється мірою його енергії. Будь-яка зміна енергії тіла на величину  $\Delta E$  веде до зміни маси цього тіла на величину  $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ . Проте, тут істотно те, яка частина енергії може бути використана. Лише у останні десятиліття навчилися використати атомну енергію, і тому енергія спокою

просто не реалізовувалася (тобто маса зберігалася). Оскільки енергія, що реалізовується – це різниця енергій, наявність енергії спокою не проявлялася. Більше того, в силу великого значення  $c^2$  зміна маси, коли змінюється її енергія, достатньо мала, і у більшості випадків експериментально не виявляється, незважаючи на досить точні зважування [6].

У релятивістській механіці кінетичну енергію визначають як ту частину енергії точки, яка перетворюється на нуль, якщо  $v = 0$ . Знайдемо умови, коли це може бути виконано. Для  $v/c \ll 1$  множник  $\gamma$  можна розкласти в ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2.$$

Тоді формулу (3.75) можна переписати таким чином:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots,$$

обмежившись двома першими членами розкладання. Отримане співвідношення можна трактувати таким чином. В результаті того, що тіло набуває швидкості, до його енергії спокою додається кінетична енергія, і ця сума є повною енергією рухомого тіла. Звідси, кінетична енергія  $T$  тіла, що рухається з довільною швидкістю, дається виразом:

$$T = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1). \quad (3.76)$$

Для малих швидкостей цей вираз переходить в класичний вираз для кінетичної енергії

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Якщо точка рухається в полі, де її потенціальна енергія визначається як

$U(\mathbf{r})$ , а сила, що діє на неї, як  $\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r})$  (тобто точка знаходиться в полі консервативної сили) сума повної і потенціальної енергії точки зберігається

$$E + U(\mathbf{r}) = \text{const},$$

що є законом збереження в релятивістському випадку, без урахування руху точки, яка створює поле [4].

Використовуючи вирази

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma, \quad E = mc^2\gamma,$$

і виключаючи з них  $\gamma$ , можна отримати:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{E}{mc^2}; \\ \mathbf{p} &= \frac{m\mathbf{v}E}{mc^2} = \frac{\mathbf{v}E}{c^2}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

З (3.77) виходить: якщо  $v = c$ , то  $p = \frac{E}{c}$ . Згідно з (3.71) маємо

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = p^2 + m^2c^2.$$

Якщо  $p = \frac{E}{c}$ , то  $p^2 = p^2 + m^2c^2 = 0$ . Але оскільки  $c \neq 0$ , то  $m = 0$ . Отже, із швидкістю світла можуть рухатися частинка з нульовою масою, наприклад, фотони. Ультрарелятивістська границя – коли швидкість точки близька до швидкості світла  $v \rightarrow c$ ,  $p \gg mc$ . Тоді вираз для енергії набирає вигляду:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc.$$

Різні співвідношення, які використовують для розрахунків енергії і імпульсу релятивістських частинок можна представити у вигляді діаграми (рис. 3.17). Різні формули зручні для аналізу різних ситуацій:

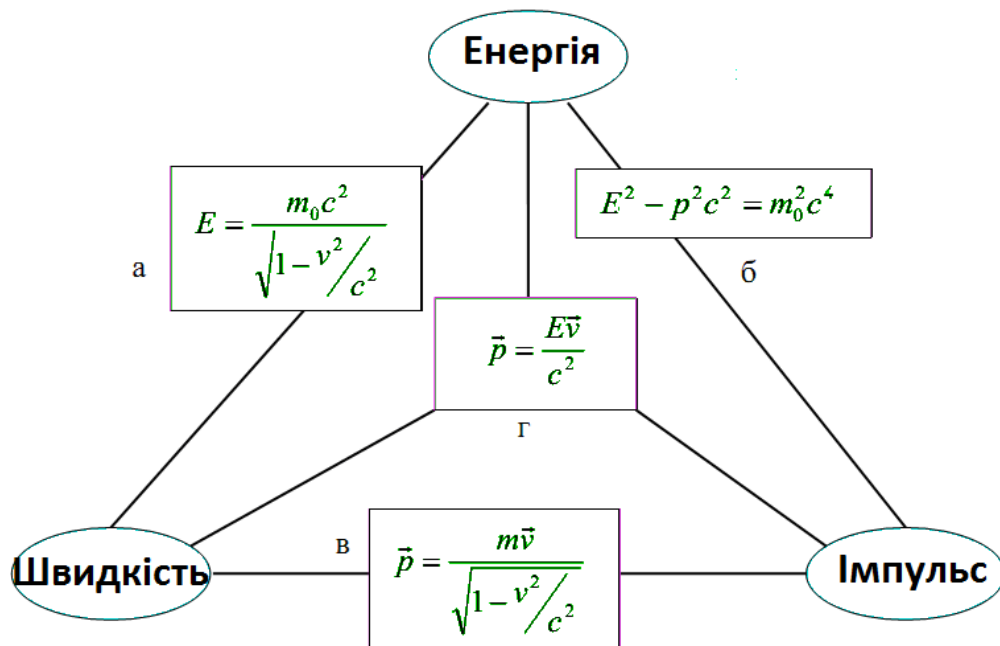


Рис. 3. 17. Діаграма для енергій і імпульсів частинки в релятивістському випадку

а) відомі швидкість, енергія, маса. Швидкість може бути визначена за часом прольоту, енергія – із законів збереження під час взаємодії точок;

б) застосування законів збереження, коли не цікавить швидкість або вона невідома;

в) для роз'язування динамічних завдань, коли точки рухаються в різних полях;

г) за відсутності інформації про масу, або коли маса не цікавить.

### 3.13.3 Релятивістські співвідношення для систем точок

Розглянемо систему точок. У релятивістській механіці, як і в класичній, енергія і імпульс адитивні. Енергія  $E$  системи  $n$  точок – це сума енергій усіх точок, що утворюють систему:

$$E = \sum_i E_i,$$

а імпульс системи точок – це сума імпульсів усіх точок



$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i.$$

Для маси системи вільних точок маємо:

$$m^2 = \frac{E^2 - \mathbf{p}^2 c^2}{c^4} = \frac{\left[ \left( \sum_i E_i \right)^2 - \sum_i (c p_i)^2 \right]}{c^4}. \quad (3.78)$$

Звідси видно, що маса системи вільних частинок не дорівнює сумі мас її складових частинок, тобто маса не має властивості адитивності. У механіці СТВ не має місця закону збереження маси.

**Приклад** [6]. Два протони з масами  $m_p$  летять один назустріч одному з однаковими енергіями  $E$  і рівними, але протилежними імпульсами  $p$ . Для кожного з протонів його енергія і імпульс пов'язані між собою згідно (3.71). Для маси системи двох протонів, відповідно до (3.78), оскільки в системі центру мас сума їх імпульсів дорівнює нулю, отримуємо:

$$m = \frac{2E}{c^2}.$$

Видно, що  $m > m_1 + m_2$ , що відрізняється від суми мас протонів, частина кінетичної енергії частинок переходить у внутрішню енергію складеної частинки, маса спокою збільшилася. Отже, виходячи з (3.75), виявляються пов'язаними між собою маса і енергія. Як виходить з експериментів, це співвідношення носить універсальний характер. Воно застосовне для будь-яких видів енергії і було встановлено Ейнштейном. Це не означає еквівалентність маси і енергії. Маса інваріантна, а енергія залежить від вибору ІСВ.

Зіткнення елементарних частинок і атомних ядер, які можуть рухатися із швидкостями, близькими до швидкості світла, також відповідають законам збереження імпульсу і енергії:

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \sum_k \mathbf{p}_k; \sum_i E_i = \sum_k E_k, \quad (3.79)$$

де  $\mathbf{p}_i, E_i, \mathbf{p}_k, E_k$  – релятивістські імпульси і енергії частинок до і після взаємодії відповідно. Це і є закон збереження імпульсу і енергії для частинок, коли вони стикаються. Ці рівняння справедливі у будь-якій ІСВ і інваріантні відносно перетворень Лоренца [4,11,20]. Які задачі можуть бути вирішені з допомогою (3.79)?

1. Розрахунок імпульсів і енергій частинок, коли вони стикаються пружно чи непружно.

2. Народження частинок, розсіяння частинок, анігіляція пари частинок.

Закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу грають величезну роль в розумінні фізичних процесів. Існування законів збереження обумовлене не якоюсь властивістю конкретних сил і рівнянь руху, а корінними властивостями простору і часу. Закон збереження імпульсу обумовлений однорідністю простору, моменту імпульсу – ізотропною простору, закон збереження енергії обумовлений однорідністю часу.

Чи підтверджують експерименти справедливість виведень релятивістської теорії? Безумовно, оскільки прискорювачі елементарних частинок, які розганяють їх до швидкостей, близьких до швидкостей світла, побудовані на розрахунках, що базуються на релятивістських теоріях. Отримані результати є практичним підтвердженням виведень СТВ, що і доводить її правильність.

### 3.14 Закони збереження і симетрія простору і часу

Вище, у відповідних розділах, були розглянуті закони збереження для замкнутих систем: закон збереження імпульсу, закон збереження моменту імпульсу, закон збереження енергії. Величини, що зберігаються, у фізиці

взагалі і в механіці зокрема називають інтегралами руху. Особливо виділяють три вказані закони збереження, оскільки їх походження має глибокий сенс: вони безпосередньо пов'язані з властивостями симетрії простору і часу.

Під час розгляду законів збереження в курсах загальної фізики виходять з динамічних рівнянь руху другого закону Ньютона [22]. Невірно вважати, що тільки властивостей симетрії вистачає для виведення вказаних законів. Закони збереження можна вивести з другого закону Ньютона, якщо під час виведення скористатись розглядом властивостей симетрії простору і часу.

Що розуміють під симетрією простору і часу? Під цими властивостями розуміють однорідність і ізотропність простору і однорідність часу. Однорідність простору означає подібність, рівноправність усіх його точок. Якщо замкнуту систему тіл перенести (транслювати) з одного місця простору в інше, то за усіх інших рівних умов це не вплине на розвиток усіх подальших явищ. Ізотропність, ізотропія простору означає подібність, еквівалентність усіх його напрямів. Ізотропію слід розуміти в тому ж сенсі, тільки замість перенесення замкнутої системи слід говорити про її поворот в просторі на довільний кут. Однорідність часу означає, що усі моменти часу рівноправні. Якщо в два будь-які моменти часу всім тілам замкнутої системи надати абсолютно однакові умови, то, починаючи з цих моментів, усі явища в цій системі здійснюватимуться абсолютно однаково.

Симетричні властивості простору і часу є узагальненням фундаментальних досліджених фактів.

Динамічні рівняння руху другого закону Ньютона для механічної системи пов'язують її стани в початковий і кінцевий моменти часу. Отже, за певних умов рішення рівнянь другого закону виявляється таким, що загальна зміна стану системи за час  $\Delta t = t_1 - t_2$  деякі динамічні змінні залишає

незмінними. Це можуть бути імпульс  $\mathbf{p}$ , момент імпульсу  $\mathbf{M}$ , механічна енергія  $E$ . Другий закон Ньютона допускає наявність групи просторово-часових перетворень Галілея, в процесі яких цей закон залишається інваріантним, якщо в ІСВ зберігаються властивості симетрії простору і часу. Оскільки у будь-якій ІСВ простір і час мають властивість симетрії, а всі механічні явища відбуваються в просторі і в часі, то властивості симетрії простору і часу повинні в тій чи іншій формі знайти своє відображення в рівняннях руху і в законах збереження.

Конкретизуємо задачу знаходження зв'язку законів збереження з властивостями симетрії простору і часу. Перетворенням піддаватимемо механічну систему, а не систему відліку, тобто саме дана механічна система підлягатиме зрушенням, поворотам та іншим перетворенням, а ІСВ залишатиметься незмінною. За наявності зовнішнього силового поля вважатимемо, що поле фіксоване відносно ІСВ [1,6].

Розглянемо закон збереження імпульсу. Виводячи закону збереження імпульсу замкнутої системи, ми виходили з другого закону Ньютона і припускали, що між частинками системи діють сили, рівні за величиною і протилежно спрямовані. Для ізольованої системи точок за однакових початкових умов розвиток подій в ній не залежить від того, в якій області простору ця система знаходиться. Якщо всі точки системи змістити на довільну і однакову для усіх точок системи величину (здійснити трансляцію фізичної системи як цілого), то ні в стані частинок, ні в її внутрішніх рухах нічого не зміниться. Тому необхідно порівняти результати одного і того ж експерименту, проведеного в старому і новому положенні лабораторної установки за умови однорідності простору системи відліку.

Справді, в замкнутій механічній системі діють тільки внутрішні сили, що є силами потенціальними. В цьому випадку сумарна потенціальна енергія взаємодії інваріантна по відношенню до операції трансляції, тобто до

зміщення з однієї точки простору в іншу на будь-який довільний вектор:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}, \dots, \mathbf{r}_n + \mathbf{R}).$$

Для кулонівських і гравітаційних взаємодій отримана рівність виконується, оскільки потенціальну енергію взаємодії можна явити як функцію різниці координат точок:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n). \quad (3.80)$$

Через однорідність простору ІСВ усі динамічні змінні механічної системи в початковому стані і зрушеному залишаються незмінними. Залишаються незмінними, зокрема, швидкість і кінетична енергія точок системи:  $T_i = \text{const}$ ;  $\Delta T_i = 0$ . Робота усіх сил, зумовлена зрушенням механічної системи, має бути дорівнювати нулю:

$$\delta A = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \delta A_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} \mathbf{R} = \mathbf{R} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{R} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} = 0, \quad (3.81)$$

в наслідок (3.37) і (3.80), де  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Для двох точок  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{R})$ . Функція  $U$  залежить тільки від різниці координат, а не від розташування точок в просторі. Тому можна перейти до нових змінних:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}; \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Однорідність простору призводить до того, що в нових змінних функція  $U$  залежить тільки від  $\Delta \mathbf{r}$ :

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Для сил взаємодії отримуємо:

$$(F_{21})_x = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial (x_1 - x_2)};$$

$$(F_{12})_x = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial (x_1 - x_2)} = \frac{\partial U}{\partial (x_1 - x_2)} = -(F_{21})_x.$$

Аналогічний результат можна отримати для проекцій сил на осі  $y, z$ . Дійсно  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , сума всіх сил дорівнює нулю,  $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ , тобто це умова, виконання якої з другого закону Ньютона дає закон збереження імпульсу.

Узагальнюючи для багатьох точок, внаслідок довільності вектора  $\mathbf{R}$  з (3.81) виходить, що

$$\sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = 0,$$

і це рівнозначно тому, що сума всіх внутрішніх сил взаємодії в замкнутій механічній системі дорівнює нулю, а імпульс такої системи зберігається (див. підрозділи 2.6, 2.7).

Якщо механічна система не замкнута, і знаходиться в зовнішньому силовому полі, то умова однорідності простору порушується, різні точки простору фізично нееквівалентні, імпульс не зберігається. Але якщо в деякому напрямі силове поле допускає інваріантне зрушення, то в цьому напрямі імпульс змінюватися не буде.

Розглянемо закон збереження механічної енергії. Нехай в механічній системі діють тільки потенціальні сили. Закон збереження енергії пов'язаний тільки з однорідністю часу. Це означає, що за однакових початкових умов еволюція системи не залежатиме від того, в який момент часу ця еволюція почалася. Для потенціальної (неконсервативної) сили  $U = U(\mathbf{r}, t) = U(x, y, x, t)$  і робота, виконана діючими силами над точками під час їх переміщення з положення 1 в положення 2, дається виразом:

$$\begin{aligned} \delta A &= -\vec{\nabla} U(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} dt; \\ A_{1,2} &= -\Delta U + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{3.82}$$

З іншого боку, робота сил, діючих на механічну систему, дорівнює прирос-

ту її кінетичної енергії:

$$A_{12} = T_2 - T_1.$$

Звідси випливає, що для приросту повної механічної енергії системи:

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (3.83)$$

Для ізольованої (замкнутої) системи всі моменти часу еквівалентні і потенціальна енергія такої системи не може явно залежати від часу:

$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ . Це означає, що

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0,$$

і в (3.83) отримаємо, що  $E_2 = E_1$ , тобто виходить закон збереження енергії у відсутності дисипативних сил. Отже

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

є повним диференціалом від координат і зміна  $dU$  означає роботу тільки внутрішніх сил, не залежить від форми переміщення під час переходу системи з одного стану в інший. Умова однорідності часу еквівалентна умові консервативності механічної системи і стаціонарності зовнішнього потенціального силового поля.

Розглянемо закон збереження моменту імпульсу. Нехай ми маємо замкнуту систему матеріальних точок. Повернемо систему як ціле відносно ІСВ на довільний кут  $d\phi$ , в процесі цього радіус-вектори матеріальних точок отримають приріст  $d\mathbf{r}_i = [d\phi \mathbf{r}_i]$ . Оскільки простір ізотропний, стан механічної системи в поверненому положенні не зміниться, зокрема, не зміниться кінетична енергія  $i$ -тої точки:  $dT_i = 0$ . Робота сил, витрачена на поворот кожної точки системи також дорівнює нулю:  $\delta A_i = dT_i = 0$ . Повна елементарна робота усіх сил також дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_i \delta A_i = \sum_i \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i [d\phi \mathbf{r}_i] = \\ &= \sum_i [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] d\phi = \sum_i N_i d\phi = d\phi \sum_i N_i = 0.\end{aligned}\tag{3.84}$$

Кут повороту  $d\phi$  довільний. Тому для замкнутої системи момент усіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_i N_i = N = 0.$$

Якщо простір ізотропний, це рівносильне тому, що момент внутрішніх сил дорівнює нулю. З (2.36, 2.37) і підрозділу 2.9.4 виходить закон збереження моменту імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу є наслідком ізотропності простору.

За наявності в ІСВ зовнішніх полів ізотропність простору може бути порушена. Різні напрями в просторі можуть бути нееквівалентними. Але може виявитися так, що напрями, припустимо, перпендикулярні деякій осі рівноправні (приклад – поле сили тяжіння). Робота зовнішнього поля в цьому напрямі дорівнює нулю

$$\delta A = -dU = 0.$$

Потенціальна енергія не залежить від повороту відносно цієї осі:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0.$$

Поворот навколо цієї осі є інваріантним і виконується закон збереження моменту імпульсу відносно цієї осі.

### **Задачі для самостійного розв’язування**

3.1. Легку кульку масою  $m$  бережно кладуть на масивну кулю маси  $M$  і відпускають обидві кулі без початкової швидкості. Система куль падає, зберігаючи вертикальне положення, з висоти  $h$  на абсолютно пружну гори-



зонтальну плиту. Визначити, на яку граничну висоту підніметься після відскоку легка кулька. Опором повітря нехтувати. ( $h_m \rightarrow 3h$ ;  $h_M \rightarrow h$ )

3.2. Брусок масою  $M$  пустили вниз по похилій площині з кутом  $\alpha$  до горизонту з початковою швидкістю  $V_0$ . Після проходження відстані  $S$  у бічну поверхню бруска влучає шайба масою  $m$ , яка летить у той же бік зі швидкістю  $v$  паралельно поверхні площини. Після абсолютно пружної взаємодії брусок проходить ще деяку відстань  $S_1$  вниз до упору, абсолютно пружно відбивається від нього і проходить вгору ще відстань  $S_2$  до зупинки. Коефіцієнт тертя бруска по поверхні похилої площини під час рухів дорівнює  $\mu$ . Знайти відстань  $S_1$ .

3.3. Знайти силу, що діє на тіло, якщо потенціальна енергія тіла має вигляд:

а)  $U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  б)  $U = \frac{GMm}{2R^3}(x^2+y^2+z^2) - \frac{3GMm}{2R}$ , де  $M, m, R - \text{const.}$

3.4. Чи є консервативними сила  $\mathbf{F} = \mathbf{a}(\mathbf{ar})$ , де  $\mathbf{a}$  – деякий постійний вектор, і сила  $\mathbf{F} = (\mathbf{a}(\mathbf{br}))$ , де  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  – деякі постійні вектори?

3.5. Важка частинка масою  $M$  зіштовхується з частинкою масою  $m$ , що покоїться. На який максимальний кут  $\alpha_{\max}$  може відхилиться важка частинка при ударі? Зіткнення абсолютно пружне, нецентральне.  $\left( \sin \alpha_{\max} \leq \frac{m}{M} \right)$

3.6. Нерелятивістська  $\alpha$ -частинка, що летить зі швидкістю  $v_0$ , здійснює пружне зіткнення з нерухомою частинкою (ядром) і відлітає під кутом  $90^\circ$  до первинного напрямку руху. При якому співвідношенні мас  $\alpha$ -частинки  $m$  і ядра  $M$  це можливо? Визначити швидкість  $v$   $\alpha$ -частинки і  $u$  ядра після зіткнення. Визначити кут  $\varphi$  між напрямом швидкості ядра, що вилітає, і первинним напрямом руху  $\alpha$ -частинки.

$$\left( v = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} v_0; u = \frac{m}{M} v_0 \sqrt{\frac{2M}{M+m}}; \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{M+m}{M-m}} \right).$$

3.7. Релятивістська заряджена частинка (електрон) влітає в поперечне електричне поле напруженості  $\mathbf{E}$  перпендикулярно полю із швидкістю  $v_0$ . Знайти рівняння траєкторії частинки в класичному і релятивістському випадках. Масу частинки вважати відомою.

3.8. Частинка масою  $M$  розпадається на дві частинки з масами  $m_1$  і  $m_2$ . Знайти енергію частинок, що розпалися, в  $S$ -системі.

3.9. Нехай в системі  $K$  імпульс релятивістської частинки дорівнює нулю. Знайти енергію  $E'$  і імпульс  $P'$  цієї частинки в системі  $K'$ , що рухається відносно  $K$  уздовж осі  $x$  із швидкістю  $V$ . Пояснити результат.

3.10. Між двома посрібленими пластинками, розташованими на відстані  $2L$ , паралельно їм посередині розміщено металеву сіточку. На сіточку подають електричний позитивний потенціал таким чином, що утворюється однорідне електричне поле напруженістю  $E$  між кожною з пластин та сіточкою. Під час нагріву пластинок відбувається емісія електронів. Вважаючи, що електрони покидають пластини з нульовою початковою швидкістю, знайдіть у релятивістському випадку швидкостей *частоту*, з якою вони будуть коливатись навколо сіточки. Будь-якими зіткненнями знехтувати. Чи буде частота коливань зростати нескінченно в процесі збільшенні напруженості поля?

$$\left( t = \sqrt{\frac{L^2}{c^2} + \frac{2Lm}{eE}}; T = 4t; v = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{L^2}{c^2} + \frac{2Lm}{eE}}}; \text{при } E \rightarrow \infty v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{c^2}{L^2}} = \frac{1}{4} \frac{c}{L} \right)$$

## РОЗДІЛ IV

### РУХ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ ПОЛІ

#### 4.1 Поле центральних сил. Гравітаційне поле сил

Поле сил – область простору, в кожній точці якого на поміщену туди точку діє сила. Центральним називають таке силове поле, в якому лінія дії сили проходить через одну і ту ж точку поля – силовий центр або полюс, а величина сили залежить тільки від відстані даної точки до полюса. Відомі приклади таких полів – гравітаційне поле однорідного масивного тіла кулястої форми; електростатичне поле точкового заряду. У полі центральних сил

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Усі центральні сили консервативні. Наприклад, під час руху в гравітаційному полі сила притягання  $\mathbf{F}$  двох точкових мас  $m_1, m_2$ , що знаходяться на відстані  $r$  одна від іншої, визначається законом всесвітнього тяжіння Ньютона:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4.1)$$

де  $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$  – гравітаційна стала. Знак мінус в (4.1) означає, що сила спрямована у бік, протилежний до напрямку радіус-вектора  $\mathbf{r}$ . Модуль сили дорівнює

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Гравітаційна стала достатньо мала, тому гравітаційні взаємодії між звичайними тілами, навіть якщо їх вважати великими з життєвої точки зору,

мізерно малі. Наприклад, два точкові тіла з масами 1 кг, що знаходяться на відстані 1 м один від одного, притягуються з силою  $F = 6.67 \cdot 10^{-11}$  н. Гравітаційні сили мізерні для взаємодії елементарних частинок. Але їх потрібно враховувати, коли відстань взаємодії дорівнює  $10^{-33}$  см. Гравітаційні сили є основними силами, що управляють рухом і еволюцією небесних тіл, маса яких величезна.

Робота гравітаційної сили під час переміщення матеріальної точки в просторі з положення 1 в положення 2 була отримана в підрозділі 3.2 і дається формулою (3.8). Зупинимось детальніше на цьому співвідношенні. Підставимо в (3.8) явний вид сили (4.1) і отримаємо:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_1^2 \left( -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} d\mathbf{r} \right) = -G m_1 m_2 \int_1^2 \frac{1}{r^2} dr = \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r_1} - \left( -G \frac{m_1 m_2}{r_2} \right) = U(r_2) - U(r_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тут враховано, що  $\mathbf{r} d\mathbf{r} = r dr$ , де  $dr$  – проекція вектора  $d\mathbf{r}$  на напрям радіус-вектора  $\mathbf{r}$  (зміна величини вектора  $\mathbf{r}$ ), а  $U(r)$  – потенціальна енергія матеріальної точки в цьому полі, тобто потенціальна енергія взаємодії точки масою  $m_1$  в полі точки масою  $m_2$  і навпаки (рис. 4.1). З того, що  $U(r)$  є

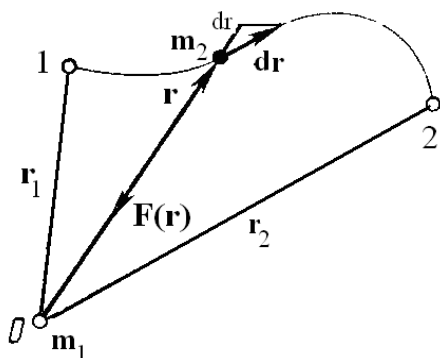


Рис. 4.1. До обчислення роботи гравітаційної сили

потенціальною енергією маси  $m_1$  в полі точкової маси  $m_2$  і навпаки виходить, що  $U(r)$  – потенціальна енергія взаємодії точкових мас  $m_1$  і  $m_2$ .

Якщо  $r \rightarrow \infty$ , то величину  $U(r)$  приймають рівною нулю:  $U(\infty) = 0$ , оскільки вважають, що взаємодія відсутня, знаходження тіла на нескінченності не вплине на

явища для будь-якого радіус-вектора точки. Тому, якщо  $U(r_2)=0$ , то  $U_1 = U(r_1) = -G \frac{m_1 m_2}{r_1}$ . Для такого вибору нульового значення потенціальна енергія двох матеріальних точок завжди буде від'ємною тому, що необхідно здійснити роботу для віддалення точки на нескінченність, оскільки точки притягуються. Максимум потенціальна енергія досягає на нескінченно-му видаленні точок, мінімум – на найменшій відстані між ними.

Для гравітаційного центрального поля справедливий принцип суперпозиції [8]: на точку масою  $m_j$ , поміщену в поле системи матеріальних точок, діє сила, що дорівнює сумі усіх сил, які діють на точку з боку інших точок системи:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = -Gm_j \sum_i \frac{m_i}{r_{ij}^2} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}},$$

де  $\mathbf{r}_{ij}$  – радіус-вектор, спрямований від  $i$ -тої матеріальної точки до  $j$ -тої. Аналогічні співвідношення справедливі для потенціальної енергії взаємодії:

$$U = \sum_i U_i = -Gm_j \sum_i \frac{m_i}{r_{ij}}.$$

## 4.2 Рівняння руху в полі центральної сили

Отримаємо рівняння руху в полі центральних сил, припускаючи, що маса тіла, що є джерелом сили, набагато більше маси частинки, яка рухається в його полі. Як приклад, можна вказати, що маса Сонця в  $10^{24}$  разів більше маси Землі, в 1000 разів більше маси Юпітера [1]. Тому з достатньою точністю можна вважати Сонце нерухомим, а планету, що рухається навколо нього – точковою. Крім того, відстань між Сонцем і планетами набагато

більше розмірів і планет і Сонця, що також говорить на користь моделі руху матеріальної точки.

Нехай  $\mathcal{M}$  – маса джерела поля,  $m$  – маса матеріальної точки, що рухається в полі маси  $\mathcal{M}$ . Рівняння руху точки  $m$  запишемо у вигляді:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{m\mathcal{M}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.3)$$

Знак «мінус» в (4.3) означає, що сила спрямована у бік, протилежний збільшенню радіус-вектора  $\mathbf{r}$ . Таким чином, задача звелася до опису руху точки в зовнішньому полі консервативних сил, в якому потенціальна енергія залежить тільки від координат точки в цьому полі, а сила  $\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$

також є функцією координат. Сила в кожній точці простору спрямована уздовж радіус-вектора, що з'єднує силовий центр і точку, яка рухається.

Основною особливістю руху частинки в центральному полі є те, що момент імпульсу точки відносно центру сили зберігається [9]. Так, для однієї точки її момент імпульсу відносно силового центру

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Обчислимо похідну від моменту імпульсу за часом:

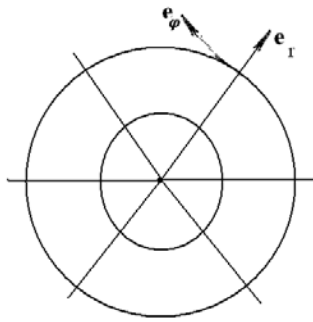
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}^{\text{ex}}] = \left[ \mathbf{r} \left( -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] = 0. \quad (4.4)$$

Похідна перетворюється на нуль, оскільки сила спрямована уздовж радіус-вектора, отже,  $\mathbf{M} = \text{const}$ . Оскільки вектори  $\mathbf{M}$  і  $\mathbf{r}$  взаємно перпендикулярні, постійність моменту імпульсу за величиною і напрямом означає, що під час руху частинки її радіус-вектор весь час залишається в одній і тій же площині, яка перпендикулярна  $\mathbf{M}$ , оскільки скалярний добуток  $(\mathbf{r}\mathbf{M}) = 0$ . А це, у свою чергу, означає, що траєкторія руху є плоскою, тобто цілком лежить в одній і тій же площині [16, 18, 19].

Виведемо рівняння руху в полярній системі координат на площині. У

полярних координатах на площині закон руху точки задають у вигляді

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$



**Рис. 4.3.** Координатні лінії полярної системи координат на площині і їх одиничні орти

му руху точки  $m$ , і  $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\varphi$ . (рис 4.2). Координатними лініями полярної системи координат є концентричні кола з центром в силовому центрі (початку відліку) і промені, що виходять з силового центру (початку координат) (рис. 4.3). Одиничний вектор  $\mathbf{e}_r$  спрямований уздовж радіус-вектора, одиничний вектор  $\mathbf{e}_\varphi$  – по дотичній до кола. Радіус-вектор рухомої точки може бути записаний у вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t). \quad (4.5)$$

Отже, будь-яке елементарне переміщення може бути записане таким чином (рис. 4.4):

$$d\mathbf{r} = (dr)_\varphi \mathbf{e}_\varphi + (dr)_r \mathbf{e}_r. \quad (4.6)$$

Очевидно, що

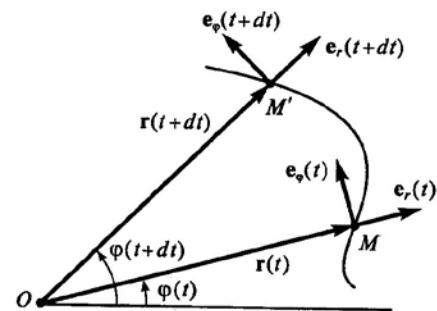
$$(dr)_\varphi = r d\varphi,$$

$$(dr)_r = dr,$$

звідси і отримуємо (4.6). Для того, щоб отримати швидкість точки  $M$  (рис. 4.2), розділимо (4.6) на  $dt$ :

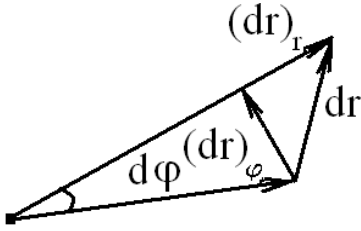
де  $\mathbf{r}(t)$  – радіус-вектор точки від силового центру,  $\varphi$  – кут повороту. Початок системи відліку помістимо в центр силового поля, в центр сил. Введемо одиничні вектори  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ , постійні за величиною

$|\mathbf{e}_r| = |\mathbf{e}_\varphi| = 1$ , і спрямовані у бік збільшення координат  $r$  та  $\varphi$ . Напрямок їх змінюється зі зміною напрямку руху точки  $m$ , і  $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\varphi$ .



**Рис. 4.2.** Зміна напрямку ортів під час переміщення точки  $M$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r = r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \mathbf{e}_r = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_r \mathbf{e}_r = \mathbf{v}_{\text{кут}} + \mathbf{v}_{\text{рад}}. \quad (4.7)$$



**Рис. 4.4.** Елементарне переміщення  $d\mathbf{r}$  (4.6) та його складові

Перший доданок в (4.7) називають кутовою або трансверсальною (поперечною) складовою швидкості  $v_\varphi = v_{\text{кут}} = r\dot{\varphi}$ , а другий – радіальною складовою  $v_r = v_{\text{рад}} = \dot{r}$ .

Модуль швидкості дорівнює:

$$v = \sqrt{v_{\text{кут}}^2 + v_{\text{рад}}^2} = \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2}; \quad (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r) = 0. \quad (4.8)$$

Введемо одиничний вектор  $\mathbf{k}$  уздовж осі  $z$ , перпендикулярної площині руху точки  $M$ . Запишемо вектор моменту імпульсу рухомої точки підставленням значення радіус-вектора (4.5) і швидкості (4.7):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{e}_r \times m(v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_r \mathbf{e}_r)] = mrv_\varphi [\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi] + mrv_r [\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r] = mrv_\varphi \mathbf{k} = r\dot{\varphi} m \mathbf{k} = r^2 \dot{\varphi} m \mathbf{k}.$$

Таким чином, момент імпульсу рухомої точки в полярній системі координат на площині має вигляд:

$$\mathbf{M} = r^2 \dot{\varphi} m \mathbf{k} \quad (4.9)$$

Повне рішення задачі про рух в центральному полі сил найпростіше отримати, виходячи із законів збереження енергії і імпульсу для рухомої точки, записаних в полярних координатах [9, 18, 27]:

$$\frac{mv^2}{2} + U(r) = E - \text{const}.$$

Підставимо сюди значення модуля швидкості з (4.8):

$$\frac{m}{2}(r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + U(r) = E. \quad (4.10)$$

Використовуючи (4.9), виразимо  $\dot{\varphi}$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}, \quad (4.11)$$



і підставимо в (4.10):

$$\frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{M^2}{m^2 r^2} \right) + U(r) = E.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно  $\dot{r}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}; \\ \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Розділяючи змінні і інтегруючи, маємо:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + C. \quad (4.13)$$

Отримане співвідношення в неявному виді визначає закон руху – залежність відстані між центром сили і рухомою точкою  $r(t)$  від часу.

Щоб визначити вид траєкторії і її рівняння  $r = r(\varphi)$ , знайдемо  $d\varphi$  з (4.11):

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt.$$

Підставляючи сюди  $dt$  з (4.12) та інтегруючи, в результаті отримуємо:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + C. \quad (4.14)$$

Задача в загальному вигляді розв'язана. Остання формула визначає зв'язок між  $r$  і  $\varphi$ , тобто, рівняння траєкторії. Формула ж для  $t$  (4.13) визначає в неявному виді відстань  $r$  рухомої частинки від центру, як функції часу.

### 4.3 Особливості руху в полі центральної сили

Співвідношення для  $r$  і  $\varphi$  (4.14) визначає загальне рішення задачі про рух в полі центральної сили, незалежно від виду  $U(r)$ . Отримане загальне рішення справедливе для будь-якої центральної сили, яка залежить тільки від відстані до центру сили. Відзначимо деякі загальні властивості руху точки в полі такої сили [1, 2, 6].

1. Рух відбувається в нерухомій площині, що проходить через центр сил, і це є слідством (4.4).

2. Кут  $\varphi$  змінюється з часом завжди монотонно.

3. Траєкторія точки симетрична відносно прямих, що проходять через центр сили і точки траєкторії, в яких величина радіус-вектора набуває екстремальних значень – в точках повороту. Це впливає з того, що залежність  $\varphi = \varphi(r)$  містить  $r^2$ , тобто  $\varphi$  набуває однакових значень як для позитивних, так і від’ємних  $r$ . Таким чином, матеріальна точка, що знаходиться в початковий момент часу в точці повороту і має швидкість в одному випадку  $v_0$ , а в іншому  $-v_0$ , рухатиметься по симетричних кривих. Дійсно, в точках повороту радіус-вектор екстремальний, і з виразу для закону збереження (4.10) можна отримати

$$E = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Розв’язуючи це рівняння відносно  $r$ , можна визначити точку або точки, де  $\dot{r} = 0$ . Це, проте, не зупинка частинки, як для одновимірного руху, оскільки кутова швидкість  $\dot{\varphi} \neq 0$  для  $M \neq 0$  (див. 4.11). Тому рівність  $\dot{r} = 0$  відповідає точкам повороту  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$ , в яких  $E = E(r, \varphi)$  досягає мінімуму і максимуму відповідно.

4. Радіус-вектор точки за однакові проміжки часу описує однакові пло-

щі. Це означає, що момент імпульсу точки відносно силового центру допускає просту геометричну інтерпретацію.

Нехай у момент часу  $t$  положення точки задається радіус-вектором  $\mathbf{r}$ . Як видно з рис. 4.5, зміна радіус-вектора  $\mathbf{r}$  дається величиною  $d\mathbf{r}$  і визначає нескінченно малий трикутник площинною  $d\mathbf{S}$ :

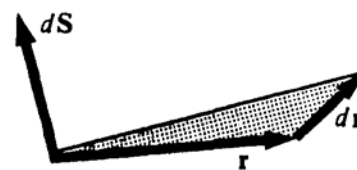


Рис. 4.5. До поняття секторальної швидкості

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{r} d\mathbf{r}]. \quad (4.15)$$

Вектор  $d\mathbf{S}$  перпендикулярний площині, в якій лежать вектори  $\mathbf{r}$  і  $d\mathbf{r}$ . Оскільки  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ , то:

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{r} \mathbf{v} dt].$$

Звідси,

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{r} \mathbf{v}]. \quad (4.16)$$

Величина в (4.16) називають *секторальною швидкістю*. З використанням секторальної швидкості момент імпульсу  $\mathbf{M}$  точки відносно силового центру можна записати так:

$$\mathbf{M} = 2m\dot{\mathbf{S}},$$

або

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2m}\mathbf{M}; \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2m}\mathbf{M}; \quad d\mathbf{S} = \frac{1}{2m}\mathbf{M}dt \quad (4.17)$$

для  $\mathbf{M} = \text{const}$ , що спостерігається, коли здійснюється рух в полі центральних сил.

Інтегруючи праві і ліві частини останнього виразу в (4.17), маємо:

$$\mathbf{S} - \mathbf{S}_0 = \frac{1}{2m}\mathbf{M}(t - t_0);$$

$$\Delta S = \frac{1}{2m} M \Delta t. \quad (4.18)$$

Останнє і означає, що радіус-вектор точки за однакові проміжки часу описує однакові площі.

#### 4.4 Ефективна потенціальна енергія. Межі руху

Проведемо якісний аналіз загального рішення (4.13, 4.14) і розглянемо питання про межі руху точки для центральної взаємодії, тобто, знайдемо, в яких межах може змінюватись відстань між точкою і силовим центром. У підрозділі 3.12 було показано, як розв'язується подібна задача у разі одно-вимірного руху. Зараз розглянемо випадок, коли рух відбувається в площині, тобто є двовимірним. Передусім покажемо, що така двовимірна задача може бути зведена до одновимірної [6, 16].

Руху в центральному полі відповідає повна енергія

$$\frac{mv^2}{2} + U(r) = E - \text{const},$$

або

$$\frac{p^2}{2m} + U(r) = E.$$

Згідно (4.7), швидкість точки складається з кутової і радіальної складових. Враховуючи (4.8),  $p^2 = p_r^2 + p_\phi^2$ . Тоді вирази для енергії можна переписати таким чином:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m} + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) - \text{const}. \quad (4.19)$$

Введемо поняття ефективної потенціальної енергії, яка за визначенням дорівнює:

$$U_{\text{еф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (4.20)$$

Величину  $\frac{M^2}{2mr^2}$  в (4.20) називають відцентровою енергією. Оскільки в (4.20) входять скалярні величини, ефективна енергія  $U_{\text{еф}}$  має однаковий вигляд в усіх ІСВ. Отже, в усіх ІСВ повна енергія дорівнює:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + U_{\text{еф}}(r). \quad (4.21)$$

Як видно з виразу, повна енергія залежить від  $|\mathbf{r}| = r$ . Рух точки в цьому випадку можна розглядати як уявний одновимірний рух в полі з потенціальною енергією (4.20) і повною енергією (4.21). Таким чином, задача про тривимірний рух частинки в центральному полі звелася до одновимірної задачі руху частинки в радіальному напрямі з ефективною потенціальною енергією. Отже, межі руху можуть бути знайдені так само, як в одновимірному випадку.

Оскільки виконується закон збереження моменту імпульсу точки і виконується рівність  $p^2 = p_r^2 + p_\phi^2$ , зменшення  $r$  в процесі руху повинне призводити до збільшення кутової складової імпульсу  $p_\phi$ . Це і враховує доданок  $\frac{M^2}{2mr^2}$  в (4.20). Назва його – відцентрова енергія – відображує той факт, що в процесі наближення до силового центру швидкість обертальної компоненти руху точки зростає, внаслідок чого зростає відцентровий ефект, тобто виштовхування точки від силового центру.

З урахуванням визначення (4.20) вирази (4.13, 4.14) набувають вигляду:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{еф}}(r)]}} + C;$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{эф}}(r)]}} + C. \quad (4.22)$$

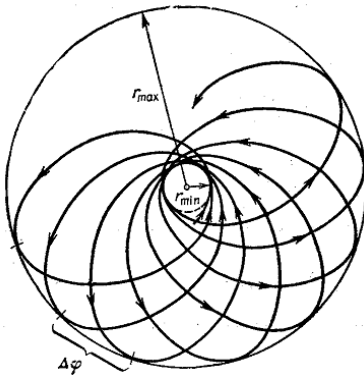
Побудувавши графік  $U_{\text{эф}}(r)$  по аналогії з тим, як це було зроблено в під-розділі 3.12 (рис. 3.16), можна визначити область зміни координат  $r$  рухо-мої точки. Оскільки в класичній механіці величини  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $t$  дійсні, то  $\dot{r}^2 > 0$ , і з рівняння закону збереження (4.21) виходить, що

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - U_{\text{эф}}(r)] > 0.$$

Отже, умова

$$E \geq U_{\text{эф}}(r) \quad (4.23)$$

визначає межі руху і область зміни  $r = r(t)$ . Безпосередньо межі області руху задаються рівністю  $E = U_{\text{эф}}(r)$ . Якщо область допустимих значень  $r$  обмежена умовою  $r \geq r_{\min}$ , рух точки інфінітний, якщо ж  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , рух фінітний і траєкторія руху повністю лежить усередині кільця з колами  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$ .



**Рис. 4.6.** Рух по фінітній незамкнутій траєкторії

Якщо рух фінітний, це не означає, що трає-кторія є замкнутою кривою. Вона може безліч разів досягати значень  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$ , заповнюючи увесь простір між двома граничними колами. За час, впродовж якого  $r$  змінюється від  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$  радіус-вектор обернеться на кут

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{эф}}(r)]}}.$$

Умова замкнутості траєкторії полягає в тому, щоб

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{k}{n},$$

де  $k, n$  – цілі числа. Для значень  $r_{\min} > 0$ ,  $r_{\max} < \infty$  через  $n$  повторів цього періоду часу радіус-вектор точки після  $k$  повних обертів співпадає зі своїм первинним значенням і траєкторія замкнеться. Проте, для довільних значень  $U(r)$  в (4.20) кут  $\Delta\varphi$  не є раціональною частиною від  $2\pi$ . Тому в загальному випадку траєкторія фінітного руху не замкнута. Вона незліченне число разів проходить через мінімальну і максимальну відстань (рис. 4.6) і за нескінченний час заповнює усе кільце між двома граничними колами.

Існує лише два види центральних полів, в яких усі траєкторії фінітних рухів замкнуті. Це поля, в яких потенціальна енергія пропорційна або  $1/r$ , або  $r^2$  (гравітаційне або кулонівське поле, або центральне поле пружних сил відповідно).

#### Приклад [12]

Нехай точка знаходиться в потенціальному полі з потенціальною енергією

$$U(r) = \frac{\alpha}{2} r^2. \text{ В цьому випадку}$$

$$U_{\text{еф}}(r) = \frac{\alpha r^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Знайдемо точки повороту з умови

$$E = U_{\text{еф}}(r).$$

Розв'язуючи отримане біквadratне рівняння, знаходимо дві точки повороту, що визначаються рівністю:

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{\alpha} \left[ E \pm \sqrt{E^2 - \frac{\alpha}{m} M^2} \right].$$

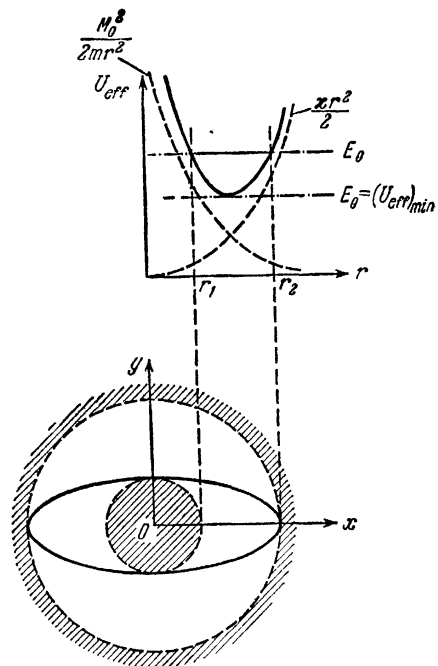


Рис. 4.7. Траєкторія руху

Отже, радіус-вектор точки змінюється в межах  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , рух фінітний,

$U_{\text{еф}}(r)$  є сумою двох кривих:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  і  $\frac{M^2}{2mr^2}$ . Траєкторію точки в загальному випадку знаходять за допомогою другого інтеграла (4.22). На рис. 4.7 показано  $U_{\text{еф}}(r)$  і траєкторія руху. Траєкторія руху визначається величиною  $E$ . Для  $E = (U_{\text{еф}}(r))_{\min}$  частинка рухається по колу радіусу  $r = r_1 = r_2$ . Для  $E > (U_{\text{еф}}(r))_{\min}$  траєкторією руху є еліпс, центр якого двічі торкається кіл  $r_1, r_2$  відповідно.

**Завдання.** Знайти  $(U_{\text{еф}}(r))_{\min}$  і величину радіусу кола  $(\sqrt{\alpha/m} M, \sqrt{E/\alpha})$ .

#### 4.5 Рух в гравітаційному полі. Траєкторія руху

Розглянемо рух матеріальної точки в центральносиметричному полі з потенціальною енергією виду  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ , де  $\alpha = Gm_1m_2$  для гравітаційного поля, або  $\alpha = -q_1q_2$  для електростатичного кулонівського поля. Дослідження проведемо на прикладі гравітаційного поля.

Під час руху в гравітаційному полі потенціальна енергія матеріальної точки масою  $m_2$  в полі силового центру масою  $m_1$  описується виразом

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (4.24)$$

Закон збереження енергії набуває вигляду:

$$E = \frac{m_2 v^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const}. \quad (4.25)$$

Підставляючи сюди вираз для квадрата швидкості (4.8), отримуємо:



$$E = \frac{m_2 \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2m_2 r^2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const.} \quad (4.26)$$

Ефективна потенціальна енергія в цьому випадку має вигляд:

$$U_{\text{еф}}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{M^2}{2m_2 r^2}. \quad (4.27)$$

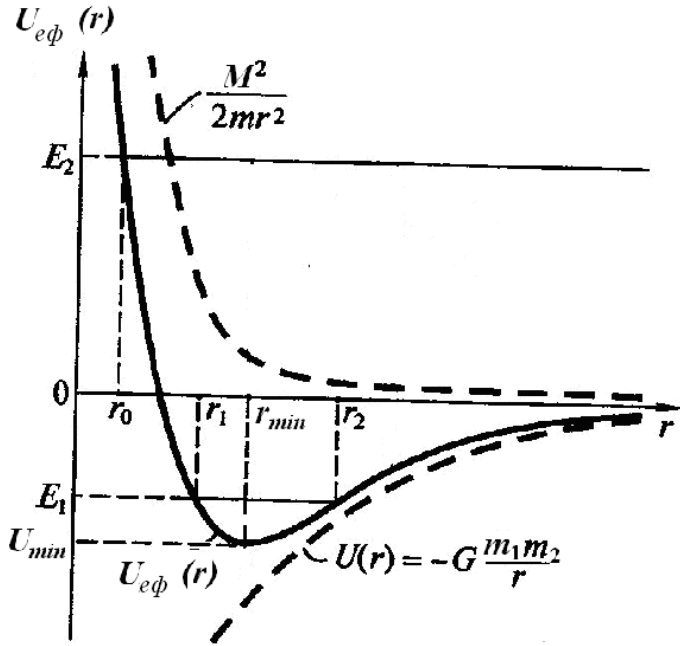


Рис. 4.8. Ефективний потенціал під час руху в гравітаційному полі

Графічна залежність  $U_{\text{еф}}(r)$  показана на рис. 4.8. Сумарна крива (показана суцільною лінією) має вигляд несиметричної потенціальної ями,  $\lim_{r \rightarrow 0} U_{\text{еф}}(r) = \infty$ , а  $\lim_{r \rightarrow \infty} U_{\text{еф}}(r) = 0$  з боку від'ємних значень. Ефективна потенціальна енергія, як видно з рис 4.8, має мінімум. Обчисливши похідну

$\frac{dU_{\text{еф}}}{dr} = 0$ , можна знайти, що мінімальне значення ефективної енергії дорівнює

$$(U_{\text{еф}}(r))_{\min} = -\frac{G^2 m_1^2 m_2^3}{2M^2}, \quad (4.28)$$

яке досягається, коли

$$r_{\min} = \frac{M^2}{G m_1 m_2^2}. \quad (4.29)$$

Проведемо горизонтальну пряму  $E = \text{const.}$  Як бачимо, для  $E = E_1 < 0$  матеріальна точка має фінітний рух і її радіус-вектор змінюється в області  $r_1 \leq r \leq r_2$  і виникають дві точки повороту. Для  $E = E_2 > 0$  рух інфінітний. В

цьому випадку існує тільки одна точка повороту  $r_0$ . Так, маючи повну енергію  $E_2$ , точка рухається з нескінченності і наближається до силового центру на мінімальну відстань  $r_0$ , на якій  $E_2 = U_{\text{сф}}$ . В цьому випадку радіальна частина кінетичної енергії  $\frac{m_2 \dot{r}^2}{2}$  перетворюється на нуль, повна досягає максимуму. Для випадку  $E = 0$  частинка на нескінченності має нульову швидкість. Справді,

$$E = \frac{m_2 v^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = 0;$$

$$\frac{m_2 v^2}{2} = G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Звідси видно, що для  $r = \infty$   $v = 0$ . Таким чином, характер руху (фінітний чи інфінітний) визначається повною енергією точки в даному полі.

Рівняння траєкторії можна отримати за допомогою загальної формули (4.14), зробивши підстановку явного виду потенціальної енергії  $U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$  і обчисливши інтеграл [12, 18, 19]:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m_2 [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} =$$

$$= \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2m_2 E}{M^2} + \frac{2Gm_1 m_2^2}{M^2 r} - \frac{M^2}{r^2}}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2m_2 E}{M^2} + \frac{2Gm_1 m_2^2}{M^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} + C.$$

Для подальших розрахунків введемо додатні за визначенням величини

$$p = \frac{M^2}{Gm_1 m_2^2}; \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{G^2 m_1^2 m_2^3}}. \quad (4.30)$$

З введенням цих величин останній інтеграл запишеться у вигляді:

$$\varphi = -\int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{p/r - 1}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{p/r - 1}{\varepsilon}\right)^2}} + C.$$

В результаті інтегрування отримаємо:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{p/r - 1}{\varepsilon}\right) = \arccos\frac{\frac{M}{r} - G\frac{m_1 m_2^2}{M}}{\sqrt{2m_2 E + \frac{G^2 m_1^2 m_2^4}{M^2}}} + C.$$

Зазвичай результат інтегрування записують з використанням введених вище позначень в такому вигляді:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi; \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (4.31)$$

вибираючи початок відліку кута так, щоб константа інтегрування  $C = 0$ . Отримане рівняння є кривою другого порядку – відомого з аналітичної геометрії рівняння конічного перерізу в полярних координатах, де початок координат, поміщений в силовий центр, знаходиться в одному з фокусів. Постійна величина  $p$  називається параметром орбіти, а постійна  $\varepsilon$  – її ексцентриситетом. Рівняння конічного перерізу – це рівняння лінії, яка утворюється перерізом конуса деякою площиною під різними кутами. З аналітичної геометрії відомо, що для  $\varepsilon < 1$  ( $E < 0$ ) траєкторією буде еліпс, рух фінітний. Для  $\varepsilon = 1$  ( $E = 0$ ) частинка рухається по параболі. Під час параболічного руху частинка на нескінченності має нульову швидкість. Для  $\varepsilon > 1$  ( $E > 0$ ) траєкторією є гіпербола. Маючи гіперболічну траєкторію, матеріальна точка приходить на нескінченність зі скінченною швидкістю. Для  $E = E_0 = (U_{\text{ef}})_{\min}$  траєкторією є коло,  $\varepsilon = 0$ . Отже, ексцентриситет  $\varepsilon$

пов'язаний з енергіями частинки і визначає вид траєкторії, а параметр  $p$  – її розмір.

#### 4.6 Рух по еліпсу. Закони Кеплера

Розглянемо детальніше рух по еліпсу, якщо повна енергія точки від'ємна,  $(U_{\text{еф}}(r))_{\min} < E < 0$ ;  $\varepsilon < 1$ , рух фінітний [9, 11] (рис. 4.9).

Використовуючи (4.31), знайдемо найменше віддалення  $r_{\min}$  від центру сили (одного з фокусів еліпса) для  $\varphi = 0$ , і найбільше віддалення  $r_{\max}$

для  $\varphi = \pi$ :  $r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}$ ,  $r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}$ .

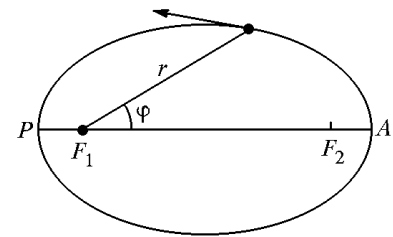


Рис. 4.9. Рух по еліпсу

Звідси можна отримати формулу, що зв'язує ці дві величини і величину  $\varepsilon$ :

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = \varepsilon.$$

Найменше віддалення називають перигелієм, найбільше – афелієм. Якщо відомі параметри руху точки по орбіті, то можна обчислити довжини великої і малої півосей еліпса. Як видно з рис.

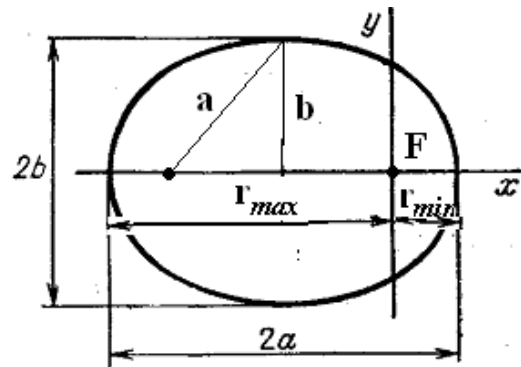


Рис. 4.10. До обчислення параметрів еліпса

4.10,  $r_{\max} + r_{\min} = 2a$ , або

$$\frac{p}{1 - \varepsilon} + \frac{p}{1 + \varepsilon} = 2a = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}, \text{ тому}$$

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$

З урахуванням (4.30) отримуємо:

$$a = \frac{Gm_1m_2}{2|E|}. \quad (4.32)$$

З властивостей еліпса відомо, що  $b^2 = a^2 - (a - r_{\min})^2$ . Звідси, мала піввісь

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m_2|E|}}, \quad (4.33)$$

де також використано (4.30). Видно, що велика піввісь еліпса залежить тільки від повної енергії і не залежить від величини моменту імпульсу, мала піввісь залежить як від повної енергії, так і від моменту. Зв'яжемо найменшу і найбільшу відстань від фокусу F еліпса з параметрами орбіти:

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon);$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon).$$

У окремому випадку кругової орбіти

$$E = (U_{\text{еф}}(r))_{\min}, \quad \varepsilon = 0, \quad r = r_0 = a = b.$$

Під час руху по колу повна, кінетична і потенціальна енергії є постійними величинами.

Отримане рівняння орбіти є вираженням першого закону Кеплера в математичному вигляді. Три закони Кеплера були встановлені ним емпірично в 1609-1619 роках в результаті обробки спостережень над рухом планет. Перший закон Кеплера стверджує: кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Це і було показано в підрозділі 4.5. Другий закон говорить про те, що секторальна швидкість кожної планети відносно Сонця стала. Його іноді формулюють таким чином: відрізок, що з'єднує Сонце з планетою – її радіус-вектор – описує за однакові проміжки часу однакові площі. Цей закон виходить з виразу для секторальної швидкості (4.18):  $\Delta S = \frac{1}{2m_2} \mathbf{M} \Delta t$ . Геометричний сенс цього закону полягає в тому, що за один і той же проміжок часу  $\Delta t$  площі заштрихованих секторів однакові під час зміни радіус-вектора рухомої точки (рис. 4.11).

Третій закон Кеплера формулюють таким чином: квадрати періодів обертання різних планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їх еліпсів і для всіх планет однакові [2].

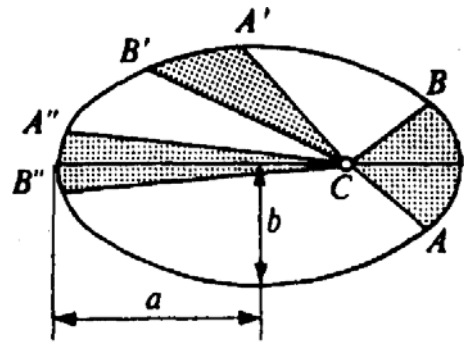


Рис. 4.11. Геометричний сенс другого закону Кеплера

Насправді, повернемося до виразу (4.17):

$$dS = \frac{1}{2m_2} M dt.$$

Інтегруючи його за часом від 0 до  $T$  – періоду обертання планети навколо Сонця, отримаємо:

$$2m_2 S = MT$$

де  $S$  – площа еліпса, що дорівнює  $S = \pi ab$ . Звідси

$$T = \frac{2m_2 \pi ab}{M}.$$

Використаємо (4.32) для параметра еліпса і перепишемо його таким чином:

$$a = \frac{Gm_1 m_2}{2|E|} = \frac{Gm_1 m_2^2}{2|E|m_2}.$$

З цього виразу знайдемо  $2m_2 E$  і підставимо в (4.33) для параметра  $b$ .

Отримане нове значення  $b$  підставимо у вираз для періоду:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_1}}; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_1}, \quad (4.34)$$

де в даному випадку  $m_1$  – маса Сонця. Виходячи з (4.34), видно, що квадрат періоду обертання планети навколо Сонця пропорційний кубу великої півосі еліпса. Період обертання по еліпсу залежить тільки від повної енергії (величини великої півосі) і не залежить від моменту (від величини малої півосі). Узявши відношення періодів будь-яких двох планет, отримуємо:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (4.35)$$

Отримані вище співвідношення справедливі і для комет – невеликих небесних тіл, що поблизу Сонця рухаються по витягнутих еліптичних орбітах, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Проте більшість комет рухаються по гіперболічних і параболічних орбітах з фокусом в Сонці [1]. Такий рух підпорядковується другому закону Кеплера. Третій закон для них втрачає сенс.

#### 4.7 Задача двох тіл

Вище були розглянуті явища руху під дією сил притягання, в яких передбачалося, що маса тіла, що є центром сили притягання, значно більша маси тіла, рух якого досліджується. Тому масивніше тіло можна вважати нерухомим, і задача зводилась до визначення характеру руху менш масивного тіла в заданому полі. Таким чином, розглянута задача називається проблемою одного тіла.

Такий підхід, проте, не завжди виправданий і отриманий результат може привести до помилок. Наприклад, в подвійних зірках компоненти можуть мати приблизно рівні маси і жодну з них не можна вважати нерухомою. Тому виникає задача урахування руху обох взаємодіючих тіл, яка називається проблемою двох тіл.

Досліджуємо рух двох матеріальних точок масами  $m_1, m_2$ , якщо потенціальна енергія їх взаємодії  $U$  залежить тільки від відстані між точками, а зовнішні сили відсутні [12]. Нехай дві точки масами  $m_1, m_2$  взаємодіють одна з одною з потенціальною енергією  $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ , яка залежить від відстані між точками. Рівняння руху цих точок відносно інерціальної К-

системи координат має вигляд:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

де

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Розглянемо далі рух точок відносно системи центру мас, що рухається поступально, тобто початок координат цієї системи знаходиться в центрі

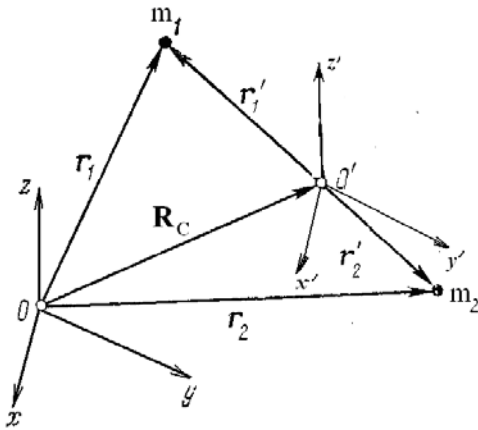


Рис. 4.12/ Система центру мас двох точок.

мас  $O'$  системи двох точок, а осі не змінюють своєї орієнтації відносно системи  $K$ , оскільки зовнішні сили відсутні. Отже, центр мас рухається рівномірно і прямо-лінійно відносно  $K$ , і тому система центру мас інерціальна.

Скористаємося тим, що (рис. 4.12)

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}'_1; & \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_C; \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}'_2; & \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_C. \end{cases}$$

Використовуючи (3.47), перепишемо останній вираз таким чином:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_C + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}; \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_C - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}; \end{cases} \quad (4.37)$$

Тут  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , і враховано те, що  $\mathbf{R}_C = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$  за визначенням, а

$m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 = 0$ . Отже, ми виразили радіус-вектор кожної частки через вектор їх відносного руху  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Підставимо отримані співвідношення (4.37) в рівняння руху (4.36) з урахуванням того, що центр мас рухається прямолінійно і рівномірно за



відсутності зовнішніх сил, тобто  $\ddot{\mathbf{R}}_C = 0$ . Тоді отримуємо:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}); \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Або

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}); \\ -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{F}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Звідси видно, що обидва рівняння звелися до одного рівняння вигляду:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (4.39)$$

де  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – зведена маса. Розв'язавши отримане рівняння відносно

$\mathbf{r}(t)$ , можна, скориставшись отриманими вище співвідношеннями, та відновити закони руху обох точок. У системі центру мас ( $\ddot{\mathbf{R}}_C = 0$ ) точки рухатимуться по подібних траєкторіях. Пряма, яка їх сполучає, весь час проходить через початок координат (точку, де  $\mathbf{R}_C = 0$ ), а  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ . Отримане рівняння є рівнянням руху однієї точки – зведеної маси – в заданому полі з центром сил, мов би вміщений в центр мас системи двох точок. Таким чином, задача двох тіл звелася до еквівалентної задачі про рух  $\mu$ -точки – уявної точки з масою  $\mu$  і радіус-вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  в центральному полі з нерухомим центром, тобто до вже розв'язаної задачі. Для цієї точки виконується збереження моменту імпульсу і повної енергії відносно центру мас:

$$\begin{aligned} \mu [\mathbf{r} \mathbf{v}] &= \mathbf{M}' \\ \frac{\mu v^2}{2} + U(\mathbf{r}) &= E', \end{aligned} \quad (4.40)$$

де  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2$ ;  $E' = T'_1 + T'_2 + U(\mathbf{r})$  – сума моментів імпульсу і енергій точок відносно центру мас.

Справді, момент імпульсу і повна енергія  $\mu$ -точки зберігаються відносно центру мас під час руху системи двох точок, оскільки сумарний момент імпульсу і сумарну енергію можна записати як:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2; E' = T'_1 + T'_2 + U(\mathbf{r}).$$

З іншого боку, враховуючи (3.47), момент імпульсу і кінетична енергія кожної з точок в системі центру мас за визначенням є:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_1 &= m_1 [\mathbf{r}'_1 \mathbf{v}'_1] = m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 [\mathbf{r} \mathbf{v}]; \quad \mathbf{M}'_2 = m_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 [\mathbf{r} \mathbf{v}]; \\ T'_1 &= \frac{m_1 v'^2_1}{2} = \frac{m_1}{2} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2; \quad T'_2 = \frac{m_2}{2} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Тут використане те, що  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  і, відповідно,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . Підсумовуючи в (4.41) моменти імпульсів точок і їх енергії, отримуємо:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 = \mu [\mathbf{r} \mathbf{v}]; \quad E' = T'_1 + T'_2 = \frac{\mu v^2}{2},$$

що співпадає з (4.40). Це свідчить про те, що отримані вище співвідношення для  $\mu$ -точки відповідають таким ж співвідношенням для системи двох точок. Таким чином, і для  $\mu$ -точки, і для системи двох точок виконуються одні і ті ж закони збереження. Порівнюючи отримані вирази законів збереження для  $\mu$ -точки із законами збереження для однієї точки в центральному полі

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{p}]; \quad \frac{mv^2}{2} + U(r) = E - \text{const} \quad (4.42)$$

приходимо до висновку, що розв'язування задачі двох тіл відносно системи К можна знайти відразу, якщо у відповідних формулах здійснити формальну заміну у вигляді:

$$\begin{aligned} m_2 &\rightarrow \mu; \quad \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'; \quad E \rightarrow E'; \\ U_{\text{ef}}(r) &= U(r) + \frac{M'^2}{2\mu r^2}. \end{aligned}$$

Загальне рішення має вигляд (порівняй з (4.22)):

$$(\mathbf{M}'\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{M}' \perp \mathbf{r}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E' - U_{\text{ef}}(r)]}} + C; \quad (4.43)$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{M'}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E' - U_{\text{ef}}(r)]}} + C.$$

Перше співвідношення визначає площину руху  $\mu$ -точки. Вона проходить через центр мас перпендикулярно її моменту імпульсу  $\mathbf{M}'$ . Два інші співвідношення визначають рух  $\mu$ -точки у вказаній площині в полярних координатах. Отже, можна знайти  $\mathbf{r}(t)$ , а потім  $\mathbf{r}_1(t)$  і  $\mathbf{r}_2(t)$ , користуючись (4.37), тобто радіус-вектори кожної точки в К- системі і їх швидкості є:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_C + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t); \quad \mathbf{v}_1(t) = \dot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{V}_C + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}(t); \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_C - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t); \quad \mathbf{v}_2(t) = \dot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{V}_C - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}(t), \end{aligned} \quad (4.44)$$

де

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_1(t) - \dot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t).$$

Таким чином, центр мас системи двох точок рухається рівномірно і прямо-лінійно, обидві точки відносно центру мас здійснюють рух в площині, що проходить через центр мас і зберігають свою орієнтацію відносно системи К. Траєкторії обох точок відносно системи центру мас подібні, центр подібності знаходиться в центрі мас, співвідношення подібності дорівнює відношенню мас точок  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ .

Нехай обидві точки взаємодіють згідно із законом

$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ,  $\alpha = Gm_1m_2$ . Загальне рішення в цьому випадку аналогічне тому, що було отримано вище для однієї точки в підрозділі 4.5. Рівняння орбіти  $\mu$ -точки:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (4.45)$$

у якому

$$p = \frac{M'^2}{\mu|\alpha|} = \frac{M'^2}{\mu G m_1 m_2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E'M'^2}{\mu\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E'M'^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}.$$

Всі інші отримані величини і параметри, а також твердження законів Кеплера справедливі і для  $\mu$ -точки. Зокрема, третій закон Кеплера має вигляд:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}, \quad (4.46)$$

– квадрат періоду обертання по еліпсу. Періоди обертання мас  $m_1$ ,  $m_2$  також дорівнюють  $T$ . Якщо відома велика піввісь  $a$  орбіти еліпса  $\mu$ -точки, то великі півосі орбіт точок можуть бути знайдені із співвідношення:

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a.$$

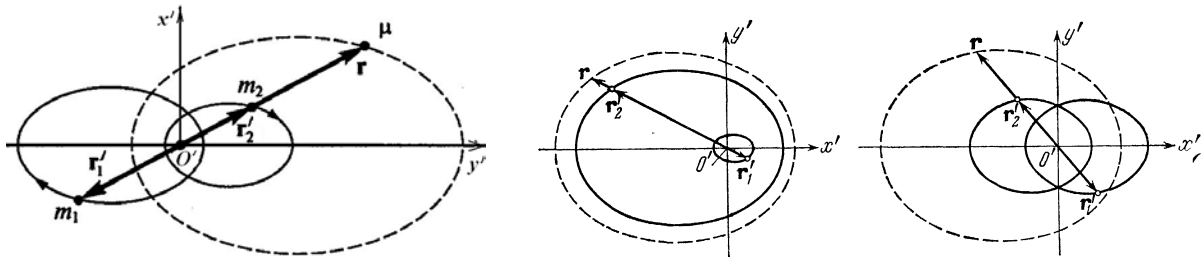
Отже, з отриманого вище виходить, що якщо  $\mu$ -точка рухається по еліпсу, то і реальні точки описують еліптичні орбіти, що і дає уявлення про рух систем планета – Сонце і подвійних зірок відповідно. Знайдемо відношення квадрата періоду  $\mu$ -точки (4.46) до кубів  $a_1$ ,  $a_2$ :

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^3}, \quad \frac{T^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^3}.$$

Видно, що ці відношення залежать від мас точок. Звідси зрозуміла набли-

женість третього закону Кеплера (4.34): оскільки маса будь-якої планети достатньо мала порівняно з масою Сонця, то відношення (4.35) для будь-яких двох планет однакове з великою точністю.

Приклади еліптичного руху частинок для різних співвідношень мас показані на рис. 4.13.



**Рис. 4.13. Еліптичний рух точок для різних співвідношень їх мас:**  
 $m_1 < m_2$ ;  $m_2 \ll m_1$ ;  $m_2 \approx m_1$  відповідно

#### 4.8 Поле поблизу поверхні Землі. Космічні швидкості

Нехай  $R_0$  – радіус Землі, а відстань від її поверхні до матеріального тіла є  $h$ , причому вважатимемо, що  $h \ll R_0$ . Повна відстань від центру Землі до точки буде  $R_0 + h$ . Сила притягання з боку Землі, що діє на цій висоті на матеріальну точку дорівнює:

$$F = \frac{GMm}{(R_0 + h)^2}, \quad (4.47)$$

де  $M$  – маса Землі. З причини малості  $h$  знаменник в (4.47) можна розкласти в ряд за степенями відношення  $h/R_0$ :

$$\frac{1}{(R_0 + h)^2} = \frac{1}{R_0^2 \left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2} \approx \frac{1}{R_0^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_0} + O\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 + \dots\right),$$

обмежившись двома членами розкладання, зважаючи, що доданок  $h/R_0$

достатньо малий: для  $h = 20\text{ км}$  відношення  $\frac{h}{R_0} \sim 10^{-3}$ . З цією точністю гравітаційну силу можна вважати постійною, незалежно від висоти і рівною

$$F_0 = \frac{GMm}{R_0^2} = gm, \quad (4.48)$$

де  $g = \frac{GM}{R_0^2} = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$  – прискорення вільного падіння або сили тяжіння біля поверхні Землі. У такому наближенні розглядаються більшість задач, пов'язаних з дією сили тяжіння поблизу поверхні Землі.

На основі закону всесвітнього тяжіння, рівняння II закону Ньютона, а також теорії фінітного і інфінітного руху планет була розроблена кількісна теорія руху небесних тіл відносно геліоцентричної системи відліку [1, 19]. Збіг спостережень і виведень запропонованої теорії довів інерціальність цієї системи. Ця теорія може бути повністю застосована для опису руху штучних супутників і космічних кораблів з вимкненими двигунами. Для виведення параметрів, що описують рух таких тіл, не враховуватимемо опір повітря, нехтуватимемо гравітаційною взаємодією їх з Сонцем і іншими планетами.

Нехай  $M$  – маса Землі,  $m$  – маса супутника. Повна енергія супутника в полі тяжіння Землі дорівнює:

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R_0} = \frac{mv^2}{2} - gR_0m.$$

Для  $E < 0$  – рух фінітний. Для здійснення польоту на невелику висоту навколо Землі по круговій орбіті необхідно надати апарату достатню швидкість, яку називають I космічною швидкістю. Цієї швидкості вистачає, щоб апарат здійснював політ навколо Землі на висоті  $R_0$  від її поверхні. Цю швидкість можна знайти з умови:

$$\frac{mv_I^2}{R_0} = mg = m \frac{GM}{R_0^2}.$$

Звідси виходить, що I космічна швидкість дорівнює:

$$v_I = \sqrt{R_0 g} = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \approx 8.1 \text{ км/сек}. \quad (4.49)$$

Апарат, запущений з такою швидкістю, стає штучним супутником Землі.

Друга космічна швидкість – це та швидкість, яку повинно мати тіло поблизу поверхні Землі, щоб покинути межі Земного тяжіння, тобто щоб тіло не повернулося на її поверхню. Цю швидкість знаходять із закону збереження, вважаючи, що  $E = 0$  для тіла, що рухається по інфінітній траєкторії (по параболі):

$$E = \frac{mv_{II}^2}{2} - G \frac{Mm}{R_0} = 0; \Rightarrow v_{II} = \sqrt{2gR_0} \approx 11.2 \text{ км/сек}. \quad (4.50)$$

Третя космічна швидкість – це та швидкість, яка потрібна тілу поблизу поверхні Землі, щоб це тіло здолало силу тяжіння Сонця і покинуло межі Сонячної системи, якщо воно видалене на відстань  $R_3$  (радіуса орбіти Землі) від Сонця:

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = G \frac{mM_c}{R_3}; \Rightarrow v_{III} = \sqrt{\frac{2GM_c}{R_3}}. \quad (4.51)$$

Тут  $M_c$  – маса Сонця. Розрахунки показують, що третя космічна швидкість  $v_{III} \approx 42 \text{ км/сек}$ . Відносно Сонця ця швидкість повинна дорівнювати  $v_{III} = 16.6 \text{ км/сек}$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

#### 4.1. Частинка рухається в центральному полі з потенціальною енергією

$U = -\alpha/r^4$ ,  $\alpha > 0$ . Вважати, що на відстані  $r_0$  від центру поля швидкість частинки дорівнює  $v_0$  і спрямована перпендикулярно до  $r_0$ . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. Маса частинки відома.

4.2. Частинка масою  $m$  рухається в центральному полі, причому її швидкість  $V = \alpha/r$ , де  $\alpha$  – стала. Знайти залежність сили  $F$  від відстані до центру поля  $r$  і траєкторію частинки.

4.3. Знайти закон руху частинки  $m$  по траєкторії в полі з потенціалом  $U = -\alpha/r^2$ , якщо повна енергія частинки  $E$  дорівнює нулю.

$$\left( r = r_0 e^{\frac{\varphi \sqrt{2m\alpha - M^2}}{M}} \right).$$

4.4. Маємо дві системи матеріальних точок з масами  $m_1, m_2, \dots, m_N$  і  $m'_1, m'_2, \dots, m'_K$ . Положення точок задається радіус-векторами  $r_1 \dots r_N, r'_1 \dots r'_K$  відповідно. Знайти силу взаємодії однієї системи точок з іншою.

4.5. Два тіла з масами  $m_1$  і  $m_2$  взаємодіють за законом гравітації. При цьому обидва тіла здійснюють в просторі фінітний рух. Знайти траєкторії тел. Завдання вирішити в С-системі.

4.6. Частинка маси  $m$  рухається по коловій орбіті радіусу  $r_0$  в полі центральних сил, потенціал якого  $-\frac{km}{r^n}$ . Показати, що якщо  $n < 2$ , то кругова орбіта стійка по відношенню до малих коливань, тобто частинка осцилює (рухається у даному випадку) по круговій орбіті.

4.7 Частинка рухається в центральному полі з потенціальною енергією  $U = -\frac{\alpha}{r^2}$ ,  $\alpha > 0$ . Вважати, що на відстані  $r_0$  від центру поля швидкість частинки є  $v_0$  і спрямована перпендикулярно до  $r_0$ . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. Маса частинки відома.  $(r_{1,2} = \pm r_0 \sqrt{2})$ .



## РОЗДІЛ V

### РУХ В НЕІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ВІДЛІКУ

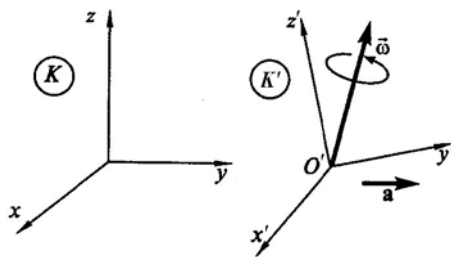
#### 5.1 Сили інерції і закони Ньютона

Всі механічні явища, обговорені вище, були розглянуті в інерціальних системах відліку (ІСВ). В таких системах вільне тіло, яке не зазнає дії від інших тіл, рухатиметься прямолінійно і рівномірно, або за інерцією. Такий рух постулює I закон Ньютона (закон інерції): «будь-яке тіло продовжує утримуватися у своєму стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, доки і оскільки воно не примушуються прикладеними силами змінити цей стан». Класична механіка постулює, що існують такі системи відліку (ІСВ), в яких усі вільні тіла або зберігають стан спокою, або рухаються прямолінійно і рівномірно. Існування ІСВ підтверджується дослідженнями. Приклади ІСВ: геліоцентрична (від імені Геліоса – бога Сонця у древніх єгиптян) система відліку, пов'язана з Сонцем і нерухомими зірками; так звана лабораторна система відліку, пов'язана з поверхнею Землі. Це теж ІСВ, оскільки обертання Землі і рух її по еліптичній орбіті практично не впливає на рух тіл, і у більшості випадків лабораторних експериментів систему відліку, пов'язану із Землею, можна вважати ІСВ.

Ніякою виділеної або переважної ІСВ не існує. Якщо відома одна ІСВ, то можна побудувати і безліч інших ІСВ. Усі вони підпорядковуються принципу відносності Галілея і рухатимуться одна відносно одної прямолінійно і рівномірно.

Проте, вільне тіло – це абстракція, оскільки не існує абсолютно вільних тіл. Тому фактично для встановлення інерціальності даної системи відліку слід відповідати на запитання: чи завжди прискорення тіла в цій системі відліку можна пояснити його взаємодією з навколишніми тілами чи ні?

Відповідь на це питання буде негативним – ні, не завжди. Це пов'язано з наявністю неінерціальних систем відліку, що рухаються прискорено відносно ІСВ. Отже, неінерціальною системою відліку назвемо систему, яка рухається прискорено відносно ІСВ. Нехай є деяка лабораторна ІСВ  $K$ . Вважатимемо її нерухомою і назвемо її абсолютною. Будь-яка система  $K'$ , яка рухається поступально з прискоренням  $\mathbf{a}$  відносно  $K$  і (або) обертається відносно неї з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , називається неінерціальною (НСВ). У загальному випадку НСВ може рухатися зі змінним поступальним прискоренням і обертатися нерівномірно (рис. 5.1). Які проблеми можуть виникати під час вивчення руху тіл в таких системах відліку в найбільш загальному випадку релятивістських швидкостей НСВ?



**Рис. 5.1. Загальний випадок руху НСВ**

а) немає поняття єдиного часу, як це розуміється в класичній механіці для розгляду руху в ІСВ. З кожною НСВ пов'язують свій власний годинник, що рухається разом з НСВ, а, отже, втрачає сенс поняття тривалості процесів, що

починаються в одній точці і закінчуються в іншій;

б) поняття тривалості процесів втрачає сенс, оскільки швидкості ходу годинника в різних точках НСВ різні, годинники не синхронізовані;

в) виникає проблема виміру і порівняння довжин предметів: неможливо визначити довжину рухомого предмета за відсутності поняття одночасності в різних точках [1, 4].

Щоб уникнути вищевикладених ускладнень, вважатимемо, що НСВ, які розглядаються нами, рухаються з малими швидкостями, значно меншими швидкості світла, коли справедливі перетворення Галілея і існують просторово-часові співвідношення такі ж, як і в ІСВ, мов би НСВ була ІСВ [2]. Тобто, розглядаємо нерелятивістський випадок руху НСВ.

Розглянемо питання про те, як співвідносяться НСВ і закони Ньютона.

1. У ІСВ причиною прискореного руху тіла є сили, що діють на тіло, а сила – результат взаємодії. У НСВ тіло може прискоритися простою зміною стану руху системи відліку. Таким чином, це прискорення не є результатом дії на тіло інших тіл. Тому І закон Ньютона в НСВ не має сенсу.

2. II закон Ньютона формулюється без зміни: в НСВ прискорення викликаються тільки силами, але разом із звичайними силами взаємодії визнається існування сил інерції. Сили інерції беруть такими, щоб забезпечити в НСВ ті прискорення, які є фактично, але які звичайними силами взаємодії можуть бути пояснені лише частково. Тому II закон Ньютона має вигляд:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ін}}, \quad (5.1)$$

де  $\mathbf{a}'$  – прискорення в НСВ;  $\mathbf{F}$  – звичайна сила в розумінні другого закону Ньютона, тобто результат взаємодії даного тіла з іншими тілами;  $\mathbf{F}_{\text{ін}}$  – сили інерції.

Особливості виконання III закону Ньютона розглянемо нижче.

## 5.2 Рівняння руху в НСВ, що рухаються поступально

Розглянемо простий випадок руху НСВ відносно системи К, коли НСВ рухається прямолінійно і прискорено [2, 6]. Нехай деяке тіло рухається в рухомій таким чином НСВ (рис. 5.2, точка М). Зв'яжемо між собою рух тіла відносно нерухомої ІСВ і рухомої НСВ. Рух тіла відносно нерухомої системи відліку К назовемо абсолютним рухом. Система відліку К' (НСВ) рухається прямолінійно і прискорено відносно К. Тіло, що є нерухомим в К', захоплюється цією системою відліку в її русі відносно К. Такий рух

називають переносним. Це рух самої НСВ відносно ІСВ. Рух тіла відносно  $K'$  назовемо відносним. Наша задача – вивести рівняння відносного руху і отримати вираз для прискорення тіла в системі  $K'$ . З рис. 5.2 видно, що у будь-який момент часу

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t); \\ \dot{\mathbf{R}}(t) &= \dot{\mathbf{R}}_0(t) + \dot{\mathbf{r}}(t); \\ \ddot{\mathbf{R}}(t) &= \ddot{\mathbf{R}}_0(t) + \ddot{\mathbf{r}}(t).\end{aligned}\tag{5.2}$$

В цьому виразі для поступального руху НСВ і тіла в НСВ:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{v}_{\text{абс}}; \quad \ddot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{v}}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{абс}} -$$

абсолютна швидкість і прискорення відповідно, тобто швидкість і прискорення тіла в нерухомій системі відліку  $K$ ;

$\dot{\mathbf{R}}_0(t) = \mathbf{v}_0$ ;  $\ddot{\mathbf{R}}_0(t) = \dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{a}_0$  – переносна швидкість і переносне прискорення відповідно. Це швидкість і прискорення НСВ (системи  $K'$ ), якщо вважати, що в ньому тіло знаходиться у стані спокою;

$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_{\text{відн}}$ ;  $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}_{\text{відн}} = \mathbf{a}_{\text{відн}}$  – відносна швидкість і прискорення. Це швидкість і прискорення тіла в системі відліку  $K'$ . Як виходить з (5.2)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{абс}} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\text{відн}}; \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\text{пер}}; \\ \mathbf{a}_{\text{абс}} &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{відн}}; \quad \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_{\text{пер}}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Рівняння II закону Ньютона в системі  $K$  має вигляд:

$$m\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{F},$$

або

$$m(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{відн}}) = \mathbf{F}.$$

Нас цікавить рух в  $K'$  (в НСВ). З останнього рівняння отримуємо:

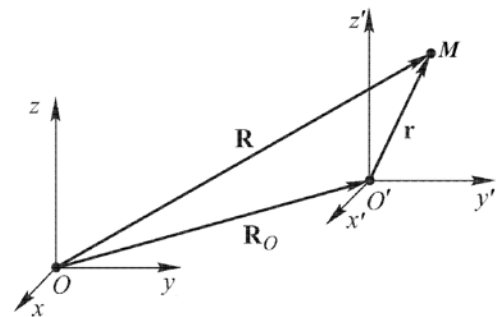


Рис. 5.2. До виведення рівняння руху в НСВ

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0. \quad (5.4)$$

Це і є рівняння руху матеріальної точки або тіла, що рухається з прискоренням  $\mathbf{a}_{\text{відн}}$  в НСВ, яка у свою чергу рухається з прискоренням  $\mathbf{a}_0$  відносно нерухомої ІСВ К-системи. Отже, в системі К' рівняння руху має вигляд (5.4), яке можна переписати таким чином:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ін}}, \quad (5.5)$$

де:

$\mathbf{F}$  – звичайна сила в розумінні другого закону Ньютона як результат взаємодії з іншими тілами;

$\mathbf{F}_{\text{ін}} = -m\mathbf{a}_0$  – сила інерції – добуток маси тіла на прискорення системи відліку;

$m\mathbf{a}_{\text{відн}}$  – добуток маси на прискорення тіла в даній системі відліку (в системі К');

$(\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0)$  – сила як результат взаємодії тіл в НСВ (в К').

В нерелятивістській механіці сила  $\mathbf{F}$  в (5.5) інваріантна відносно переходу з однієї ІСВ в іншу. Це «справжня» сила, що є результатом взаємодії тіл. Сила інерції  $\mathbf{F}_{\text{ін}} = -m\mathbf{a}_0$  з переходом в іншу систему відліку, що рухається прискорено, зміниться.

Під час дії на тіло сили інерції, для неї не існує протидіючої сили, прикладеної до іншого тіла. Рух тіла під дією сили інерції аналогічний руху в зовнішніх силових полях. Тому для  $\mathbf{F}$  існує рівна і протилежно спрямована сила, і третій закон Ньютона для цієї сили виконується. Для  $\mathbf{F}_{\text{ін}}$  такої сили немає, і для неї третій закон Ньютона не виконується.

### 5.3 Формула Пуансо

Виведемо формулу Пуансо, яка зв'язує похідну довільного вектора за

часом з самим вектором, якщо змінюється тільки напрям цього вектора.

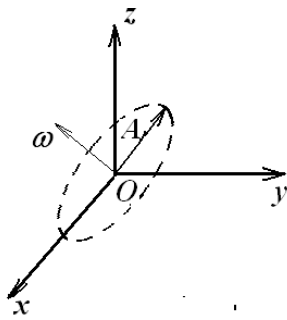


Рис. 5.3. До виведення формули Пуансо

Наприклад [2,9], як обчислити похідну за часом вектора, що здійснює обертальні рухи з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  відносно точки O як початку вибраної системи координат (рис. 5.3)? Тобто, у вектора  $\mathbf{A}$  змінюється тільки напрям (орієнтація), а не довжина. Таким чином  $|\mathbf{A}| = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ .

Визначимо похідну  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ .

За визначенням,

$$\Delta \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + dt) - \mathbf{A}(t);$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + dt) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}.$$

Як видно на рис. 5.4, модуль приросту вектора  $\mathbf{A}$  можна записати таким чином:

$$|\Delta \mathbf{A}| = A \sin \theta \cdot d\varphi$$

де  $A$  – модуль вектора  $\mathbf{A}$ . Розділивши в останньому виразі ліву і праву частини на  $dt$ , отримуємо:

$$\frac{dA}{dt} = A \sin \theta \cdot \frac{d\varphi}{dt} = A \sin \theta \omega.$$

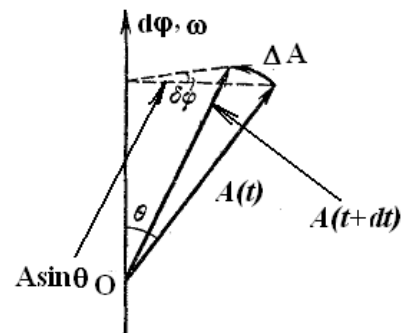


Рис. 5.4. Приріст  $\Delta \mathbf{A}$  вектора  $\mathbf{A}$

Розглянемо орієнтацію вектора  $\Delta \mathbf{A}$ . Як виходить з рис. 5.4, вектор  $\Delta \mathbf{A}$  знаходиться в площині, перпендикулярній вектору елементарного кутового повороту  $d\varphi$ . Отже, вектор  $\Delta \mathbf{A} \perp \omega$ , оскільки вектори  $d\varphi$ ,  $\omega$  колінеарні.

У випадку  $d\varphi \rightarrow 0$  вектор  $\Delta \mathbf{A} \perp \mathbf{A}$ . Звідси маємо, що

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\omega \mathbf{A}]; \quad \|\omega \mathbf{A}\| = |\omega| |\mathbf{A}| \sin \theta \quad (5.6)$$

Тобто, вектори  $\mathbf{A}$ ,  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  складають праву трійку векторів. Отже, для будь-якого довільного вектора  $\mathbf{A}$  зміну його орієнтації під час обертання з постійною кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\omega}$ , можна виразити через похідну за часом цього вектора

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{A}].$$

Як **приклад** можна вказати зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями під час руху точки по колу з кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\omega}$ , коли у точки змінюється тільки напрям радіус-вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}].$$

#### 5.4 Сили інерції під час довільного прискореного руху НСВ

Розглянемо загальний випадок руху НСВ, коли система відліку  $K'$  рухається прискорено поступально відносно системи відліку  $K$  і одночасно обертається відносно миттєвій осі, що проходить через точку  $O'$  з кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\omega}$ , причому кутова швидкість може змінюватися як за величиною, так і за напрямом (рис. 5.5). Отримаємо рівняння руху точки  $M$ , що рухається відносно як нерухомої системи  $K$ , так і системи  $K'$  [2, 6, 13]. Тобто, розглянемо довільний рух НСВ.

В будь-який момент часу виконуються співвідношення (5.2). Точка  $M$  рухається в системі  $K'$  і має в ній відносну швидкість  $\dot{\mathbf{r}}$  і відносне прискорення  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Нехай  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  – координати точки  $M$  в  $K'$ -системі. Радіус-вектор  $\mathbf{r}$  точки  $M$  можна розкласти за одиничними ортами цієї системи координат:

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'.$$

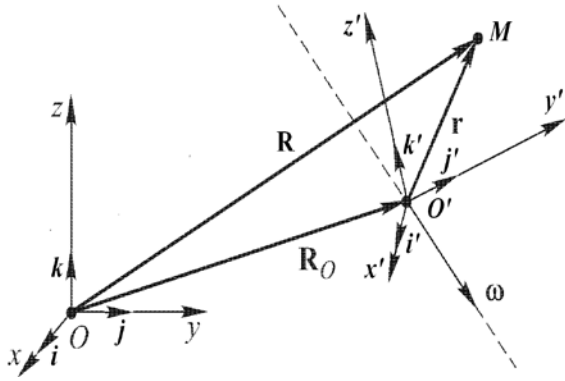


Рис. 5.5. До виведення рівняння руху в НСВ

Тоді:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \\ &= (\dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}') + \\ &+ \left( x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right).\end{aligned}$$

Довжини одиничних ортів  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  системи  $K'$  залишаються

незмінними, але їх орієнтація (напрямок) з часом змінюється, і кожен з них обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  разом з системою  $K'$ . Тому для цих векторів справедлива формула Пуансо (5.6):

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = [\omega \mathbf{i}']; \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = [\omega \mathbf{j}']; \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\omega \mathbf{k}'].$$

Таким чином, маємо:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}') + (x'[\omega \mathbf{i}'] + y'[\omega \mathbf{j}'] + z'[\omega \mathbf{k}']). \quad (5.7)$$

Перший доданок в дужках в (5.7) – похідні координат, мов би система  $K'$  була нерухомою. Для нерухомого в цій системі спостерігача – це швидкість точки  $M$  в  $K'$ , або, за прийнятою термінологією, швидкість відносного руху:

$$\mathbf{v}_{\text{відн}} = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}'.$$

Другий доданок в дужках перепишемо таким чином:

$$x'[\omega \mathbf{i}'] + y'[\omega \mathbf{j}'] + z'[\omega \mathbf{k}'] = [\omega(x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')] = [\omega \mathbf{r}].$$

Отже, (5.7) набирає вигляду:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\text{відн}} + [\omega \mathbf{r}] \quad (5.8)$$

Це справедливо для будь-якого довільного вектора  $\mathbf{b}$ , що рухається в системах відліку  $K$  і  $K'$ :



$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{K'} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{b}].$$

Для абсолютної швидкості отримуємо:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\text{абс}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\text{відн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_{\text{відн}} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\text{відн}} + \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

Або

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{відн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}. \quad (5.9)$$

Швидкість  $\mathbf{v}_0$  – швидкість руху початку координат  $O'$  системи  $K'$  відносно точки  $O$ , тобто швидкість поступального руху точки  $O'$  відносно точки  $O$ ;  $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$  – обертальна швидкість, що виникає внаслідок обертання системи  $K'$  відносно  $K$ . Швидкість  $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$  – це та швидкість, яку мала б точка  $M$ , якби вона знаходилась у стані спокою в системі  $K'$ , тому вона і називається переносною. Вона складається з двох частин: швидкості поступального руху  $\mathbf{v}_0$  початку координат  $K'$  відносно  $K$ , і кутової швидкості обертання  $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$  системи  $K'$ .

Для знаходження абсолютного прискорення обчислимо похідну за часом від (5.9):

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \dot{\mathbf{v}}_{\text{абс}} = \dot{\mathbf{v}}_{\text{відн}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{пер}} = \dot{\mathbf{v}}_{\text{відн}} + \dot{\mathbf{v}}_0 + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}]. \quad (5.10)$$

Знайдемо  $\dot{\mathbf{v}}_{\text{відн}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{\text{відн}} &= \frac{d}{dt}(\dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}') = \\ &= (\ddot{x}'\mathbf{i}' + \ddot{y}'\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}') + \dot{x}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}'] + \dot{y}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}'] + \dot{z}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}'] = \\ &= \mathbf{a}_{\text{відн}} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{відн}}]. \end{aligned}$$

Таким чином, в повній аналогії з (5.8) маємо, що

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{відн}} = \mathbf{a}_{\text{відн}} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{відн}}]. \quad (5.11)$$

Доданок  $\dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{a}_0$  в (5.10) – це прискорення системи  $K'$  відносно нерухомої

системи К. Доданок  $[\omega \dot{\mathbf{r}}]$  в (5.10) перепишемо, підставивши замість  $\dot{\mathbf{r}}$  (5.8). Тоді:

$$[\omega \dot{\mathbf{r}}] = [\omega \mathbf{v}_{\text{відн}}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]]$$

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{абс}} &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{відн}} + [\omega \mathbf{v}_{\text{відн}}] + [\omega \mathbf{v}_{\text{відн}}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]] + [\dot{\omega} \mathbf{r}] = \\ &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{відн}} + 2[\omega \mathbf{v}_{\text{відн}}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]] + [\dot{\omega} \mathbf{r}] = \\ &= \mathbf{a}_{\text{відн}} + 2[\omega \mathbf{v}_{\text{відн}}] + \mathbf{a}_0 + [\omega [\omega \mathbf{r}]] + [\dot{\omega} \mathbf{r}]. \end{aligned}$$

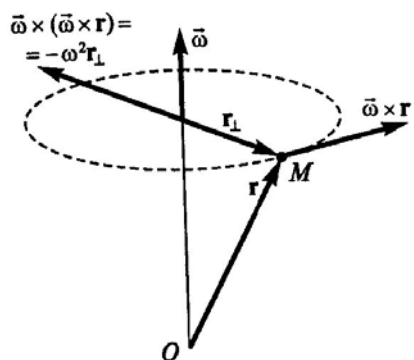
Отже:

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{відн}} + 2[\omega \mathbf{v}_{\text{відн}}] + \mathbf{a}_0 + [\omega [\omega \mathbf{r}]] + [\dot{\omega} \mathbf{r}] \quad (5.12)$$

В цьому випадку в (5.12) до переносного прискорення відносяться:

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_0 + [\omega [\omega \mathbf{r}]] + [\dot{\omega} \mathbf{r}]. \quad (5.13)$$

Розглянемо доданки в (5.13). Вектор  $\mathbf{a}_{\text{пер}}$  залежить тільки від руху системи



**Рис. 5.6. Напрямок доцентрового прискорення**

К' відносно нерухомої системи К. Таке прискорення мала б точка М, якби вона була нерухомою в системі К'. Водночас цьому  $\mathbf{a}_0$  – переносне прискорення, обумовлене тільки прискоренням поступальним рухом системи К', тотожним з рухом початку координат. Інші два доданки обумовлені обертанням системи К'. Наявність доданку  $[\dot{\omega} \mathbf{r}]$

обумовлена прискоренням обертанням системи К'; для  $\omega = \text{const}$  цього доданку немає. Доданок  $\mathbf{a}_{\text{дц}} = [\omega [\omega \mathbf{r}]]$  є доцентровим прискоренням, яке спрямоване до миттєвої осі обертання. Справді, якщо вектори  $\omega$  і  $\mathbf{r}$  не перпендикулярні один одному, то вектор  $\mathbf{r}$  можна розкласти на дві складові – паралельну вектора  $\omega$  і перпендикулярну цьому вектора:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel.$$

Звідси виходить, що

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\parallel] = 0;$$

$$\mathbf{a}_{\text{дц}} = [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] = [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\perp]] = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\perp) - \mathbf{r}_\perp \omega^2 = -\mathbf{r}_\perp \omega^2,$$

оскільки  $(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\perp) = 0$ . З рис. 5.6 безпосередньо видно, що цей доданок спрямований до миттєвої осі обертання. Доданок  $2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_{\text{відн}}]$  в (5.12) називається Коріолісовим, або поворотним прискорення:

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_{\text{відн}}].$$

Таким чином, остаточно отримуємо:

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{відн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_{\text{відн}} + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_{\text{відн}}] + \mathbf{a}_0 - \mathbf{r}_\perp \omega^2 + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}]. \quad (5.14)$$

У (5.14) встановлений зв'язок прискорення точки в нерухомій і рухомій системах відліку, який складає сенс теореми Коріоліса про додавання прискорень.

Повернемося до нашої основної задачі – отримати рівняння руху тіла в НСВ. Рівняння II закону Ньютона в системі К має вигляд:

$$m \mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{F} \quad (5.15)$$

де  $\mathbf{F}$  – рівнодійна усіх сил, що діють на матеріальну точку, у тому числі і з боку інших тіл. Підставимо сюди значення  $\mathbf{a}_{\text{абс}}$  з (5.14):

$$m \mathbf{a}_{\text{відн}} + 2m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_{\text{відн}}] + m \mathbf{a}_0 - m \mathbf{r}_\perp \omega^2 + m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}] = \mathbf{F}.$$

Звідси маємо:

$$m \mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}] + m \mathbf{r}_\perp \omega^2 - m \mathbf{a}_0 - m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}]. \quad (5.16)$$

У (5.16)  $\mathbf{a}_{\text{відн}}$  – прискорення точки в  $K'$ -системі. Таким чином, до «справжньої» сили, що підпорядковується другому закону Ньютона, додалися ще дві сили інерції:

1) сила інерції Коріоліса  $\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}]$ . Чисельний коефіцієнт 2

вказує на дві однакові складові в прискорення Коріоліса. Перша складова пов'язана зі зміною кутової швидкості за величиною під час відносного переміщення точки в системі, що обертається. Друга складова – це зміна відносної швидкості за напрямком під час обертання цієї системи;

2) переносна сила інерції  $\mathbf{F}_{\text{пер}} = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} - m\mathbf{a}_0 - m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}]$ . У переносну силу інерції входять три доданки:

сила інерції  $\mathbf{F}_{\pi} = -m\mathbf{a}_0$ , пов'язана з прискоренням поступальним рухом системи відліку  $K'$  відносно системи  $K$ ;

відцентрова сила інерції  $\mathbf{F}_{\text{вц}} = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$ ;

сила інерції  $\mathbf{F}_{\text{н}} = m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}]$ , пов'язана з нерівномірним обертанням системи відліку  $K'$  відносно системи  $K$ .

Всі вказані сили інерції існують тільки в тих системах відліку, які рухаються прискорено і обертаються. Ці сили зникають, якщо здійснити перехід до ІСВ. Відцентрова сила інерції спрямована уздовж радіусу від осі обертання. В ІСВ існує доцентрова сила  $\mathbf{F}_{\text{дц}}$ . В системі відліку, що обертається, відцентрова сила урівноважується доцентровою, якщо тіло нерухоме в цій системі відліку. Сила Коріоліса  $\mathbf{F}_{\text{кор}}$  виникає тільки в системі відліку, що обертається, і тільки тоді, коли тіло рухається в цій системі. Величина цієї сили залежить як від відносної швидкості руху тіла в цій системі відліку ( $\mathbf{v}_{\text{відн}}$ ), так і від величини кутової швидкості обертання  $\boldsymbol{\omega}$  самої НСВ. Якщо відносна швидкість  $\mathbf{v}_{\text{відн}} = 0$ , то  $\mathbf{F}_{\text{кор}} = 0$ . Як виходить з форми запису сили Коріоліса у вигляді векторного добутку векторів  $\mathbf{v}_{\text{відн}}$  і  $\boldsymbol{\omega}$ ,

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}], \quad (5.17)$$

сила  $\mathbf{F}_{\text{кор}}$  перпендикулярна швидкості  $\mathbf{v}_{\text{відн}}$ , не здійснює роботи і є

гіроскопічною силою.

Таким чином, маємо:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{пер}} + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{\text{вц}} + \mathbf{F}_{\text{кор}}. \quad (5.18)$$

Це рівняння можна розглядати як рівняння руху в НСВ. Очевидно, сили інерції, на відміну від звичайних сил в розумінні другого закону Ньютона, виникають тільки в НСВ. У ІСВ ніяких сил інерції немає. Сили інерції в НСВ діють на точку точно так, як і звичайні сили. Відмінність полягає в тому, що у разі сил інерції немає «джерела» цих сил. Джерелом цих сил є стан самої системи відліку в її русі відносно ІСВ. Тому відпадає питання про застосування III закону Ньютона до сил інерції, оскільки не можна вказати пару тіл, що взаємодіють між собою, в яких виникає взаємодія, результатом якої є сила інерції. Сили інерції вводяться тільки для того, щоб формально добитися аналогії з другим законом Ньютона.

До особливостей сил інерції можна віднести таке.

1. Сили інерції не інваріантні, якщо здійснити перехід з однієї неінерціальної системи відліку в іншу.

2. Сили інерції не підпорядковуються третьому закону Ньютона: не існує протилежної сили, прикладеної до іншого тіла, оскільки немає іншого тіла. Таким чином, рух під дією сил інерції схожий на рух тіл в зовнішніх полях.

Реальні чи фіктивні сили інерції? З точки зору другого закону Ньютона вони фіктивні і зникають, коли виконується перехід в ІСВ. З точки зору взаємодії з полями на дію сил інерції можна дивитися як на дію з боку яких-небудь реальних полів. Ці сили реальні, якщо розглядаються фізичні явища в НСВ, оскільки завжди можна вказати наслідки дій цих сил. Введення цих сил в рівняння руху і використання їх для пояснень фізичних явищ в НСВ є правильним і необхідним. Але використання поняття сил

інерції для аналізу рухів в ІСВ є помилковим. У ІСВ ці сили відсутні.

## 5.5 Сили інерції в НСВ, що рухаються поступально

Проаналізуємо рух тіл в системах відліку, що рухаються прискорено і поступально [1]. Рівняння руху тіла має вигляд (5.5):

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ін}},$$

де  $\mathbf{F}_{\text{ін}} = -m\mathbf{a}_0$  дорівнює добутку маси тіла на поступальне прискорення НСВ відносно нерухомої лабораторної системи відліку. Під час такого руху системи відліку виникає поступальна сила інерції. В цьому випадку сила інерції, що виникає, є просторово-однорідною, вона має одне і те ж значення для всіх точок системи: сила інерції залежить тільки від прискорення, з яким початок НСВ рухається відносно інерціальної системи [5].

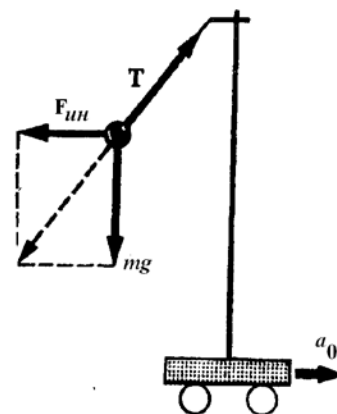


Рис. 5.7. Сили, що діють на тіло в НСВ

Рух відносно даної НСВ можна досліджувати двома способами. Можна визначити закон руху точки  $\mathbf{R}(t)$  в деякій ІСВ, використовуючи другий закон Ньютона в його стандартному виді, а потім перерахувати його відносно НСВ, і отримати  $\mathbf{r}(t)$  (див. рис. 5.2) із закону перетворення координат (5.2), вважаючи відомим  $\mathbf{R}_0(t)$ . Другий спосіб: можна відразу розв'язати задачу в НСВ, використовуючи видозмінений другий закон Ньютона, де до реальної сили  $\mathbf{F}$  в правій частині додається сила інерції  $\mathbf{F}_{\text{ін}} = -m\mathbf{a}_0$ . Виникнення цієї нової сили, коли розглядається рух відносно НСВ, є цілком формальним, і не відображає виникнення будь-якої нової дії на точку з боку інших тіл. В цьому сенсі це фіктивна сила. Але для нерухомого спостерігача в НСВ вона призводитиме до таких же наслідків,

як і реальна сила такої ж величини.

### Розглянемо приклади

#### *Маятник на візку.*

1. Рівноважний стан маятника в **НСВ**, яка рухається в горизонтальному напрямі з поступальним прискоренням  $a_0$ . Всі сили, що діють на маятник, показані на рис. 5.7. Рівняння руху маятника має вигляд:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{\text{ін}} = 0,$$

оскільки вантаж в **НСВ** знаходиться в стані спокою. Як встановлено вище,  $\mathbf{F}_{\text{ін}} = -m\mathbf{a}_0$ .

Звідси отримуємо

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = -\mathbf{F}_{\text{ін}} = m\mathbf{a}_0; \quad \text{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}.$$

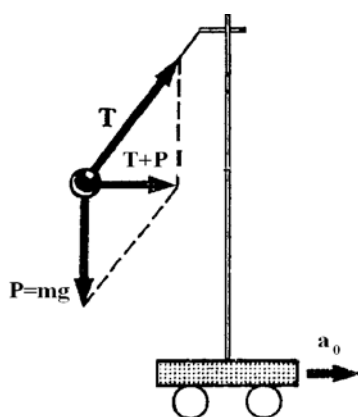


Рис. 5.8. Сили, що діють на тіло в **ІСВ**

2. Розглянемо рух того ж маятника в нерухомій **ІСВ** (рис. 5.8). В цьому випадку сили інерції відсутні. Є сила натягу нитки  $\mathbf{T}$  і сила тяжіння  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ . Рівняння руху має вигляд:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{T} + m\mathbf{g};$$

$$\mathbf{F}_{\text{ін}} = 0.$$

#### *Рамка з маятником, що вільно падає. [3]*

По двох напрямних рамка може вільно, під дією сили тяжіння, ковзати вниз. До рамки підвішений маятник. Маятник здійснює власні коливання, коли рамка нерухома (рис. 5.9). Під час коливань маятника рамку відпускають, і рамка разом з маятником ковзає вільно вниз. Рамка може бути приведена в стан вільного падіння у будь-якій фазі коливання маятника. Рухи маятника в процесі вільного падіння маятника залежать від того, в якій фазі воно почалося (рис. 5.10). Якщо рамку відпускають у той

момент, коли важок маятника досягає свого крайнього правого/лівого положення, де він на мить застигає, то під час падіння рамки маятник не коливається, тобто не рухається відносно рамки, а залишається немов застиглий у відхиленому положенні. Якщо рамку відпускають у той момент, коли маятник проходить точку положення рівноваги, або знаходиться у будь-якій іншій точці, де його швидкість не дорівнює нулю, то під час падіння рамки маятник продовжує рівномірно обертатися навколо точки підвісу. Абсолютне значення його швидкості відносно рамки не змінюється, постійно змінюється лише її напрямок відносно рамки.

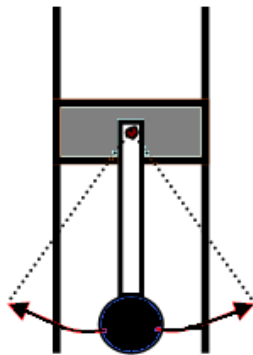


Рис. 5.9. Власні коливання маятника, коли рамка нерухома

Розглянемо рух маятника детальніше.

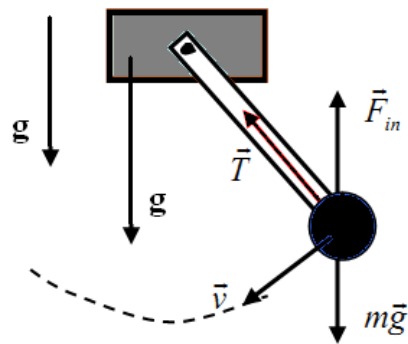


Рис. 5.10. Рух маятника, якщо рамка вільно падає

1. В неінерціальній системі відліку, пов'язаній з рамкою, що падає, рівняння руху маятника має вигляд:

$$m \frac{dv_{\text{відн}}}{dt} = ma_{\text{відн}} = mg + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{\text{ін}}.$$

Оскільки

$$\mathbf{F}_{\text{ін}} = -mg,$$

то

$$m \frac{dv_{\text{відн}}}{dt} = \mathbf{T}.$$

Але швидкість руху підвісу завжди перпендикулярна силі натягу, отже, сила натягу не може змінити цю швидкість по модулю, а змінює її тільки



за напрямком. Таким чином, маятник рухатиметься з постійною швидкістю по колу навколо точки підвісу (рис. 5.10).

Якщо в момент початку руху швидкість маятника дорівнювала нулю, і він був в крайньому положенні, то надалі він так і залишається в цьому положенні без руху в НСВ, оскільки сила натягу в цьому положенні також дорівнює нулю:

$$\mathbf{T} = 0; \quad \mathbf{T} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

**2. В інерціальній системі відліку** сили інерції відсутні. Сили, що діють на маятник, показані на рис. 5.8. Це сила тяжіння і сила натягу нитки. Рівняння руху має вигляд:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}.$$

Якщо зобразити прискорення  $\mathbf{a}$  у вигляді суми двох прискорень  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ , рівняння руху розпадеться на два рівняння виду:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_1 &= m\mathbf{g}; \\ m\mathbf{a}_2 &= \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Перше з них має рішення

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{g},$$

і описує вільне падіння маятника, а друге співпадає з рівнянням

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\text{відн}}}{dt} = \mathbf{T} \text{ і описує падіння навколо точки підвісу.}$$

Як було розглянуто вище на прикладі маятника, в НСВ, що вільно падає, сили інерції повністю компенсують дію сили тяжіння, і рух відбувається так, ніби немає ні сил інерції, ні сили тяжіння – настає стан невагомості. Аналогічна компенсація гравітаційного тяжіння до Землі відбувається і якщо розглядати явища відносно космічного корабля на орбіті навколо Землі. Тяжіння до Землі компенсується відцентровою силою

інерції.

Аналіз розглянутих прикладів показує, що часто рішення задачі в НСВ є більш простим і наочним, ніж в ІСВ.

### 5.6 Сили інерції в НСВ, що обертаються

Розглянемо випадок обертання системи відліку з постійною кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ . Для таких умов рівняння руху тіла в системі, на відміну від (5.16), може бути записане таким чином:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}}\boldsymbol{\omega}] + m\mathbf{r}_{\perp}\omega^2. \quad (5.19)$$

В останньому рівнянні (5.19) до звичайної сили  $\mathbf{F}$ , що розуміється як результат взаємодії даного тіла з іншими тілами за другим законом Ньютона, додаються дві сили інерції: сила інерції Коріоліса і відцентрова сила інерції.

Сила Коріоліса

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}}\boldsymbol{\omega}] \quad (5.20)$$

існує тільки в тій СВ, яка обертається, і тільки тоді, коли тіло в цій системі відліку рухається. Ця сила перпендикулярна площині, в якій лежать вектори кутової і відносної швидкостей. Якщо ці швидкості співпадають за напрямом, то прискорення і сила Коріоліса дорівнюють нулю, що виходить із перетворення на нуль векторного добутку двох колінеарних векторів в (5.20).

Відцентрова сила інерції

$$\mathbf{F}_{\text{вц}} = m\omega^2\mathbf{r}_{\perp} \quad (5.21)$$

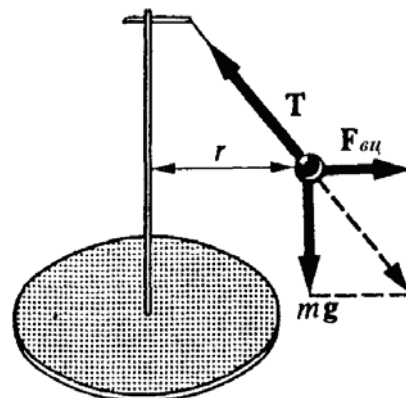
спрямована уздовж радіус-вектора від осі обертання і діє таким чином, що тіло, що знаходиться в СВ, яка обертається, виштовхується з цієї системи під дією цієї сили. Так само як і сила Коріоліса, відцентрова сила інерції

існує тільки в тій СВ, що обертається.

Розглянемо декілька **прикладів** [1-3], що ілюструють дію сил інерції на тіла, яке знаходяться в СВ, що обертаються.

### **Маятник на диску, що обертається.**

Під час обертання диска з постійною кутовою швидкістю маятник знаходиться в положенні рівноваги (рис. 5.11). Сила Коріоліса відсутня, оскільки маятник знаходиться в положенні рівноваги і не рухається, його швидкість  $v_{відн} = 0$  дорівнює нулю. У НСВ рівняння його руху має вигляд:

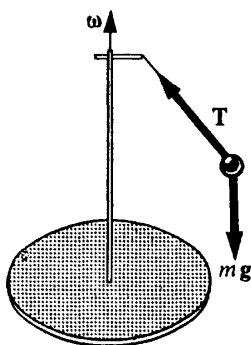


**Рис. 5.11. Рівновага маятника на диску в НСВ**

$$ma_{відн} = mg + T + F_{ц} = 0.$$

У ІСВ рівняння його руху (рис. 5.12) таке:

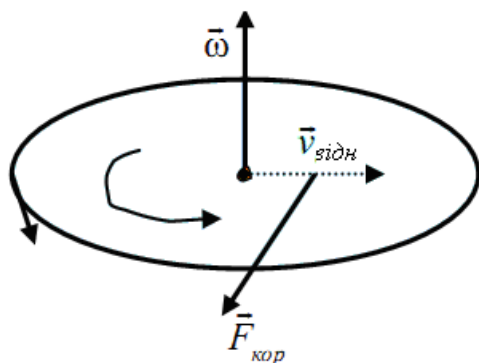
$$ma_{абс} = T + mg.$$



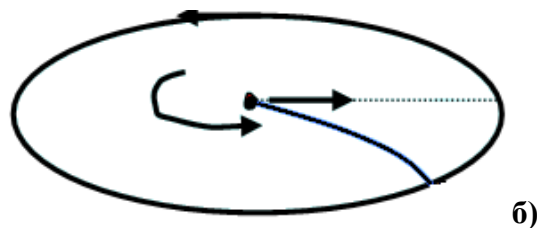
**Рис. 5.12. Рівновага маятника в ІСВ**

У льотчиків, коли вони виконують фігури вищого пілотажу, під дією відцентрової сили виникає перевантаження.

**Відцентрова сила інерції у центрифугах і сепараторах, що швидко обертаються, забезпечує рух частинок і їх сепарацію за визначеними ознаками.**



а)



б)

**Рис. 5.13. Дія сили Коріоліса на кульку (а) і її траєкторія (б)**

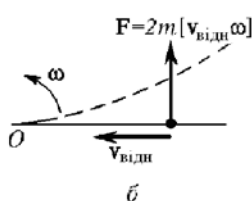
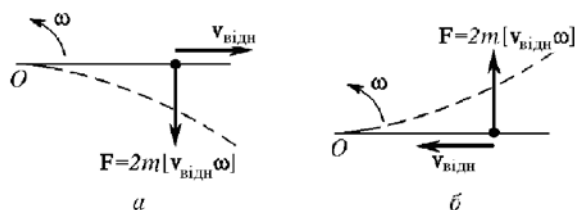
Дія відцентрової сили обумовлює відхилення нерухомих тіл від

положення рівноваги під час поворотів і обертань у швидкісних потягах, міському транспорті, на каруселі.

Криволінійна траєкторія кульки по поверхні диска, що рівномірно обертається, обумовлена дією **сили Коріоліса** (рис. 5.13).

Розглянемо кульку М масою  $m$ , яка рухається уздовж жорсткого стержня зі швидкістю  $v_{\text{відн}}$ . Стержень обертається навколо нерухомої осі, перпендикулярної площині рисунка з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 5.14).

На кульку, що рухається таким чином, діє сила Коріоліса  $F_{\text{кор}} = 2m[v_{\text{відн}} \omega]$ , і вона спрямована перпендикулярно стержню, що обертається. Отже, стержень здійснює на кульку бічний тиск, сила якого дорівнює  $F = 2m[v_{\text{відн}} \omega]$ . Тіло діє на кульку з рівною і протилежною силою  $F = 2m[\omega v_{\text{відн}}]$ . Якщо кулька віддаляється від осі обертання (рис. 5.14 а),



**Рис. 5.14. Рух кульки уздовж жорсткого стержня**

Якщо кулька рухається в протилежний бік, наближуючись до осі обертання, сила  $F$  спрямована у бік обертання стержня (рис. 5.14 б). В ході цього кутова швидкість обертання стержня зростає, стержень згинається так, що його увігнута сторона спрямована в бік обертання.

сила  $F$  спрямована у бік, протилежний обертанню і уповільнює рух кульки. Стержень згинається так, що опуклою стороною він спрямований у бік обертання (пунктирна лінія на

## 5.7 Рух тіл поблизу Землі з урахуванням її обертання

Застосуємо рівняння відносного руху (5.16) до руху тіл відносно Землі. Визначаючи рівняння руху, нехтуватимемо дією планет Сонячної системи

на рух Сонця. Нехай інерціальною системою  $K$  є система з початком в центрі мас Сонця і осями, спрямованими на нерухомі зірки. У цій системі Земля рухається по еліпсу під дією гравітаційних сил з боку Сонця. Крім того, Земля обертається навколо власної осі з практично постійною кутовою швидкістю.

Введемо систему координат  $K'$ , жорстко пов'язану із Землею, і помістимо її початок в точку  $O'$  – центр Землі. Рівняння руху тіла відносно цієї системи координат ( $K'$ ) має вигляд:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 + m\omega^2\mathbf{r}_{\perp} + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}], \quad (5.22)$$

де під  $\mathbf{F}$  розумітимемо суму всіх зовнішніх сил, що діють на тіло. Цю силу можна представити у вигляді суми трьох сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}', \quad (5.23)$$

де  $\mathbf{F}_3$  – сила гравітаційного тяжіння тіла з боку Землі;

$\mathbf{F}_0$  – сила гравітаційного тяжіння з боку Сонця, Місяця і інших небесних тіл;

$\mathbf{F}'$  – сума усіх інших сил, що діють на дане тіло: тертя, опору, натягу нитки та ін.

Крім того, позначимо в (5.22)  $\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0$  – прискорення центру Землі відносно системи  $K$ . З урахуванням введених величин рівняння (5.22) перепишемо таким чином:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = (\mathbf{F}_3 + m\omega^2\mathbf{r}_{\perp}) + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F} + (\mathbf{F}_0 - m\dot{\mathbf{v}}_0). \quad (5.24)$$

Використаємо фундаментальний фізичний закон: **усі тіла в одному і тому ж полі тяжіння падають з однаковим прискоренням**. З цього принципу виходить, що сила в гравітаційному полі, що діє на тіло, не залежить від хімічного складу тіла, а залежить тільки від його маси [2, 11].

В силі  $\mathbf{F}_0$  головну роль грають сили тяжіння Сонця і Місяця. Поблизу

Земної поверхні ці сили можна вважати постійними, і поле поблизу поверхні Землі – однорідним. Отже, таке поле надає одне і те ж прискорення всім тілам, незалежно від їх точки знаходження. Тому такому тілу зовнішнє гравітаційне поле надає те ж саме прискорення, як і Землі, тобто  $\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0$ . В такому наближенні останній доданок в дужках в (5.24) перетворюється на нуль:

$$\mathbf{F}_0 - m\dot{\mathbf{v}}_0 = 0.$$

Отже, зовнішні гравітаційні сили повністю компенсуються поступальними силами інерції внаслідок прискореного руху тіл, що надається їм Землею.

Сила  $\mathbf{F}_3$  гравітаційного тяжіння Землі, а з нею і сума  $\mathbf{F}_3 + m\omega^2\mathbf{r}_\perp$  пропорційна масі тіла  $m$  в силу того ж фундаментального закону, і не залежить від відносного руху тіла. Цю суму можна вважати як єдину силу, і позначити через  $m\mathbf{g}$ :

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_3 + m\omega^2\mathbf{r}_\perp \quad (5.25)$$

Рівняння руху (5.22) набуває вигляду:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}'. \quad (5.26)$$

Тут величина  $\mathbf{g}$  одна і та ж для всіх тіл і може змінюватися тільки в процесі переходу з однієї точки простору в іншу.

Для встановлення фізичного сенсу вектора  $\mathbf{g}$  розглянемо тіло на поверхні Землі. Припустимо, що зовнішні сили відсутні, тобто  $\mathbf{F}' = 0$ , а швидкість тіла  $\mathbf{v}_{\text{відн}} = 0$ . Тоді, як випливає з (5.26)

$$\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{g}.$$

Отже, вектор  $\mathbf{g}$  – це прискорення вільного падіння тіла, що падає відносно Землі за умови, що його швидкість в даний момент дорівнює нулю. Якщо ж його швидкість не дорівнює нулю, то виникає додаткове прискорення, обумовлене наявністю сили Коріоліса. Таким чином, з (5.25) видно, що

прискорення вільного падіння складається з двох доданків:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{абс}} + \omega^2 \mathbf{r}_{\perp}, \quad (5.27)$$

де перший доданок  $\mathbf{g}_{\text{абс}} = \mathbf{F}_3 / m$  – прискорення, викликане силою гравітаційного тяжіння Землі, за відсутності інших, окрім Землі, гравітаційних полів, і коли системі відліку нерухома. Другий доданок  $\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$  пов'язаний з обертанням Землі – це відцентрове прискорення, викликане наявністю відцентрової сили інерції, обумовленої обертанням Землі. У ньому  $\mathbf{r}_{\perp}$  – відстань від тіла до осі обертання Землі.

## 5.8 Вага і зважування тіл

Розглянемо, що входить до поняття «вага тіла». Як відомо, вагою тіла називається прикладена до тіла сила  $\mathbf{P}$ , яка дорівнює силі, з якою це тіло діє на підставку, на якій воно лежить, або тягне за підвіс. Також передбачається, що підставка і підвіс знаходяться у стані спокою в тій системі відліку, де здійснюється зважування, тобто передбачається, що тіло, підставка (підвіс) нерухомі відносно Землі [2]. Під час зважування підставка діє на тіло з силою  $\mathbf{F} = -\mathbf{P}$ , де  $\mathbf{P}$  – вага тіла,  $\mathbf{a} = 0$ , тіло нерухоме.

Використовуючи (5.26), підставимо в нього  $\mathbf{v}_{\text{відн}} = 0$ ,  $\mathbf{a}_{\text{відн}} = 0$ ,  $\mathbf{F}' = -\mathbf{P}$ . Тоді отримаємо:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

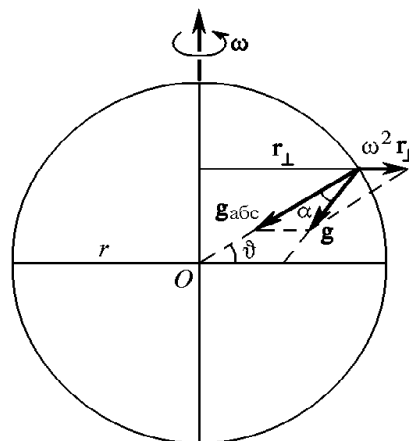
З урахуванням (5.27) маємо:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}_{\text{абс}} + m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{F}_3 + m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}. \quad (5.28)$$

Отже,  $\mathbf{P}$  є геометричною сумою сили гравітаційного тяжіння і відцентрової сили інерції.

Якщо тіло підвішене на нитці, міркування ті ж, а напрямок нитки визначає напрямок сили  $\mathbf{P}$  і прискорення вільного падіння  $\mathbf{g}$ . Його називають напрямком виску або прямовисним напрямом.

Вектор  $\mathbf{g}_{abc}$  характеризує гравітаційне поле Землі і визначається розмірами, формою і густиною речовини Землі. Якби Земля була правильною кулею, а її речовина була б розподілена сферично симетрично, то вектор  $\mathbf{g}_{abc}$  був би спрямований точно до центру Землі. Тому напрям  $\mathbf{g}_{abc}$  – напрям до центру Землі. Напрямок  $\mathbf{g}$  – це напрям виску, воно пов'язане з наявністю відцентрового прискорення  $\omega^2 \mathbf{r}_\perp$ . Тому напрям виску  $\mathbf{g}$  – це напрям діагоналі паралелограма, побудованого на векторах  $\mathbf{g}_{abc}$  і  $\omega^2 \mathbf{r}_\perp$  (рис. 5.15).



**Рис. 5.15. Напрямок векторів  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}_{abc}$**

Звідси виходить, що навіть якщо б Земля була строго сферично симетричною, той і напрям до її центру не співпав би з напрямом виску. Кут  $\alpha$  між цими двома напрямками досить малий. Навіть сферично симетрична Земля є сплюснутою з полюсів через її обертання, і це теж причина відмінності напрямків векторів  $\mathbf{g}$  і  $\mathbf{g}_{abc}$ . Втім, нехтуючи цим, і вважаючи Землю ідеальною сферою, кут  $\alpha$  можна знайти, якщо скористатися теоремою синусів. Оскільки:

$$\frac{m\omega^2 r_\perp}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \theta},$$

то звідси виходить, що:

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g} \sin \theta, \quad (5.29)$$

де  $\theta$  – географічна широта місця. На полюсі і екваторі кут  $\alpha$  перетво-



рюється на нуль. Оскільки  $r_{\perp} = R_3 \cos \theta$  (рис. 5.15), то, проектуючи відцентрову силу на напрямок вектора  $\mathbf{g}$ , маємо:

$$F_{\text{вц.верт.}} = m\omega^2 R_3 \cos^2 \theta,$$

де  $R_3$  – радіус Землі. Використовуючи це, а також те, що  $\cos \alpha \approx 1$ , можна написати, що

$$g = g_{\text{абс}} - \omega^2 r_{\perp} \cos \theta = g_{\text{абс}} - \omega^2 R_3 \cos^2 \theta. \quad (5.30)$$

Похибка такого наближення порядку  $\alpha^2$ . Величина  $\mathbf{g}$  може бути знайдена з експерименту за допомогою зважування тіл або з дослідів вільного падіння тіл.

Співвідношення (5.30) визначає залежність величини прискорення вільного падіння  $g$  від широти місцевості  $\theta$ . Найбільше значення

$g_{\text{max}} = g_{\text{абс}}$  величина  $g$  приймає на полюсах, де  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Найменше значення

$g_{\text{min}} = g_{\text{абс}} - \omega^2 R_3$  – на екваторі, де  $\theta = 0$ .

## 5.9 Прояви сили Коріоліса під час руху тіл

Вище, в (5.26), було отримано рівняння руху тіла в полі Землі з урахуванням її обертання. Воно має вигляд:

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}'.$$

Для вільного тіла у відсутності зовнішніх сил, коли  $\mathbf{F}' = 0$ , це рівняння переходить у

$$\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}]. \quad (5.31)$$

Отримане рівняння описує вільний рух, вірніше, падіння тіла з урахуванням обертання Землі. Як видно з отриманого рівняння, вплив обертання Землі пов'язаний з дією сили Коріоліса. Вплив відцентрової сили врахова-

ний автоматично, оскільки в  $\mathbf{g}$  (у  $m\mathbf{g}$ ) ця сила входить як складова частина. Наявність відцентрового прискорення не змінює виду рівняння, змінюється тільки напрям від  $\mathbf{g}_{абс}$  до напрямку вису. Істотніше впливає на характер руху сила Коріоліса. В процесі падіння тіл без початкової швидкості Коріолісова сила відхиляє тіла, що вільно падають, на схід і до екватору від напрямку вису. Покажемо це, вважаючи для простоти, що  $\mathbf{g}$  постійна величина в тій обмеженій області простору, де відбувається процес падіння, і можна як спосіб рішення задачі, що виникла, використати метод послідовних наближень. Вважатимемо також, що тіло падає на екваторі. Через дію сили Коріоліса швидкість тіла  $\mathbf{v}_{відн}$  має дві складові (рис. 5.16): вертикальну і горизонтальну. На схід тіло в процесі падіння відхиляє саме вертикальна складова. Це відхилення описується рівнянням (для  $v_0 = 0$ ):

$$m\mathbf{a}_{гор} = 2m[\mathbf{v}_{верт} \boldsymbol{\omega}]$$

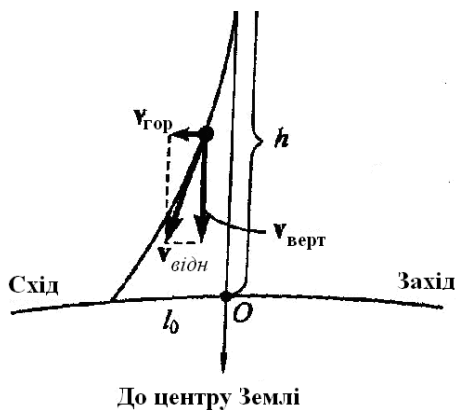


Рис. 5.16. Відхилення тіл, що падають, силою Коріоліса у поверхні Землі

Відхилення на схід:

В першому наближенні можна припустити, що  $v_{верт} = gt$ , тоді.

$$a_{гор} = 2g\omega t.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо горизонтальну компоненту швидкості:

$$v_{гор} = \int_0^t a_{гор} dt = 2g\omega \frac{t^2}{2} = g\omega t^2.$$

Другий інтеграл визначає шукане

$$l_0 = \int_0^{\tau} v_{гор} dt = \frac{1}{3}g\omega\tau^3$$

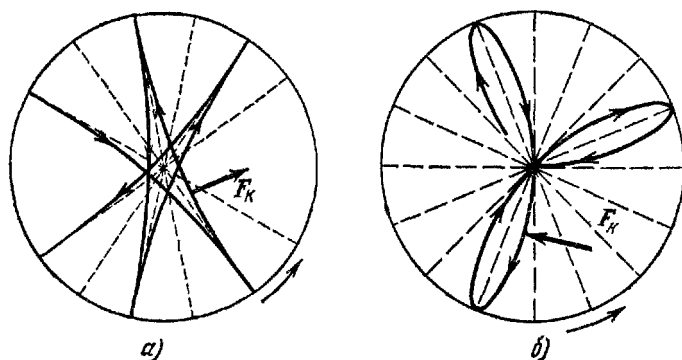
Підставимо сюди час падіння, виражений через висоту  $h$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  і

остаточно отримуємо:

$$l_0 = \frac{1}{3} g \omega \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2} = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Числові розрахунки дають такий результат: якщо  $h = 100$  м, величина відхилення  $l_0 \approx 2.2$  см, що і виправдовує наближений підхід до розв'язування

цієї задачі [1, 2, 6].



**Рис. 5.17. Криві, що описуються кінцем маятника Фуко за різних початкових умов: а) з відхиленого стану без початкової швидкості; б) з положення рівноваги з деякою початковою швидкістю**

так званого маятника Фуко. Це масивна куля, підвішена на досить довгій нитці, яка здійснює малі коливання поблизу положення рівноваги. В процесі відхилення маятника від положення рівноваги з нульовою початковою швидкістю він рухається до центру рівноваги, але сила Коріоліса, що діє на маятник, відхиляє його вправо, і він не проходить через центральну точку. Проекція точки підвісу маятника рухається по кривій, показаній на рис. 5.17 (а). Якщо ж маятнику надали деяку початкову швидкість в точці рівноваги, характер його руху буде іншим (рис. 5.17, (б)). З віддаленням від центру сила Коріоліса надає маятнику прискорення вправо [1].

Тому до моменту відхилення маятника в крайнє положення він вже має максимальну швидкість в напрямку, перпендикулярному до радіуса. Його траєкторія дотикається до кола з радіусом максимального зміщення від по-

Дослідження відхилення на схід тіл, що вільно падають, можуть служити експериментальним доказом неінерціальності земної системи відліку. Тобто, цей факт дає безпосередній доказ обертання Землі. Цій же меті служить і коливання

ложення рівноваги. Процес руху такого маятника в ІСВ пов'язаний з обертанням площини гойдання навколо вертикалі в результаті обертання Землі. Це доводить, що земна система відліку не є інерціальною. Кількісно аналіз руху маятника Фуко може бути проведений з використанням формули (5.26) за умови розкладання вектора кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$  на дві складові:  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\perp} + \boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ , де  $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$  перпендикулярна площині гойдання маятника,  $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$  – лежить в площині гойдання.

Коротко розглянемо дії сил Коріоліса на рух величезних мас повітря і океанські течії [6]. Сили Коріоліса відхиляють маси повітря, які рухаються на північ в Північній півкулі, на схід, а потоки, що рухаються на південь – відхиляють до заходу. Океанські течії Гольфстрім і Куросіо під дією сили Коріоліса відхиляються на схід. У південній півкулі Перуанська течія в північному напрямі відхиляється до заходу, а Бразильська, що тече на південь – на схід. Великомасштабна циркуляція водних мас в Північній півкулі відбувається переважно за годинниковою стрілкою, в Південній півкулі – проти годинникової. З інших проявів сил інерції Коріоліса можна відзначити підмивання правих берегів великих річок, незалежно від напрямку їх течії, в Північній півкулі, а в Південній півкулі – лівих берегів. Цим же пояснюється і більше зношення правої рейки двоколійних залізниць в Північній півкулі. У Південній півкулі більше зношується ліві рейки.

## 5.10 Принцип еквівалентності

Сили інерції, як і сили тяжіння, пропорційні масам тіл. На це звернув увагу А. Ейнштейн і запропонував розглянути уявний експеримент. Нехай спостерігач знаходиться в закритому з усіх боків просторі, наприклад, в

кабіні ліфта, і не має можливості спостерігати зовнішній світ. Спостерігач навіть не знає, де знаходиться цей ліфт – на Землі чи в космосі. Якщо кабіна ліфта знаходиться на Землі, спостерігач бачить, що усі тіла падають з однаковим прискоренням, тобто він бачить звичайний прояв сили тяжіння. У тому випадку, коли кабіна рухається з постійним прискоренням  $g$ , спрямованим у бік стелі, в просторі, де немає сил тяжіння, спостерігач також відмічає, що прискорення усіх тіл, що падають на підлогу кабіни, однакові. Дивлячись на ті явища, що відбуваються в кабіні, спостерігач не може встановити, чим викликане таке прискорення тіл: полем тяжіння, прискореним поступальним рухом самого ліфта, чи і тим і тим разом. Ніякі досліди по вільному падінню тіл в такому ліфті-лабораторії не можуть відрізнити однорідне поле тяжіння від однорідного поля сил інерції. Ейнштейн припустив, що взагалі ніякими фізичними дослідами не можливо відрізнити однорідне поле тяжіння від однорідного поля сил інерції. Це припущення і складає як постулат зміст принципу еквівалентності сил тяжіння і сил інерції: всі фізичні явища в полі тяжіння відбуваються абсолютно так само як і у відповідному полі сил інерції, якщо напруженості полів у відповідних точках простору співпадають, а початкові умови для всіх тіл замкнутої системи однакові [1, 2].

Принцип еквівалентності не стверджує, що будь-які сили інерції можна змінити гравітаційними в усьому просторі, або, що кожне гравітаційне поле може бути імітоване силами інерції, якщо системі відліку надати відповідне прискорення. Це справедливо тільки для однорідних полів, напруженість яких однакова в усіх точках простора. Тобто в загальному випадку не можна знайти таку систему відліку (ліфт-лабораторія, як приклад), яка рухається таким чином, що її прискорення в кожній з точок простору еквівалентне дії наявного там поля тяжіння, тому що конкретне поле тяжіння змінюється в процесі переходу з однієї точки простору в

іншу. На відміну від поля тяжіння, поле сил інерції в тому ж ліфті однорідне. Через неоднорідності поля тяжіння завжди можна запримітити незначну зміну відстані між тілами, що падають, а в полі сил інерції такої зміни не буде. Проте, можна завжди вибрати таку локальну систему відліку, в якій дія сил інерції і гравітації не буде відрізнятись, вважаючи, що в такій досить малій області простору в першому наближенні поле тяжіння постійне. Тоді дія сил інерції і гравітації в такому локальному вибраному просторі не відрізняються. Це і затверджує принцип еквівалентності Ейнштейна. Принцип еквівалентності, таким чином, має локальний характер.

Між тим, ньютонівські гравітаційні сили і сили інерції мають істотну відмінність в системах відліку, що обертаються. Гравітаційні сили не залежать від швидкості тіла, на які вони діють. Цю ж властивість мають поступальні сили інерції і відцентрові сили, і взагалі усі переносні сили інерції. Тому за своїми фізичними діями переносні сили інерції і гравітаційні абсолютно ідентичні, і поля цих сил неможливо однозначно відокремити один від одного. Дія сил інерції Коріоліса істотно відрізняється від дії сил гравітації. Сили Коріоліса не діють на нерухомі тіла. Вони виникають тільки у тому випадку, коли тіло рухається в НСВ, і ці сили пропорційні його швидкості. Проте, з причини еквівалентності гравітаційної і інертної мас гравітаційне поле і поле всіх сил інерції об'єднують в єдине поле сил. Це виконується в загальній теорії відносності (ЗТВ). Для такого об'єданого поля зберігають колишню назву – гравітаційне поле. Сила інерції в цьому випадку є частковим випадком гравітаційного поля, що розуміється тепер в широкому сенсі. ЗТВ, або релятивістська теорія гравітації встановлює рівняння гравітаційного поля або рівняння Ейнштейна.

Застосування принципу еквівалентності уможливило дати пояснення

одного з основних ефектів – червоного зміщення в гравітаційному полі [1].

### 5.11 Енергетичні співвідношення в НСВ

Закони збереження в замкнених системах під час руху в ІСВ є математичним наслідком рівнянь руху. За відсутності зовнішніх сил енергія, імпульс і момент імпульсу матеріальної частинки, тіла (системи матеріальних частинок, систем тіл) зберігаються. За наявності зовнішніх сил ці величини змінюються.

У НСВ разом із звичайними силами, що підпорядковуються другому закону Ньютона, діють сили інерції, і вони завжди зовнішні по відношенню до даних тіл. Тому в таких системах відліку немає замкнених систем матеріальних точок, отже, немає і законів збереження. Проте, немає ніяких обмежень для включення сил інерцій в число сил системи, як немає обмежень вважати після цього систему замкнутою. Характер законів збереження залежить від властивостей сил інерції. Наприклад, в НСВ, що обертається, для  $\omega = \text{const}$ , переносні сили інерції – відцентрові, тому центральні, а це, у свою чергу, означає, що вони потенціальні, а сили Коріоліса перпендикулярні швидкості тіла і роботу не виконують. Отже, в системі відліку, що обертається з  $\omega = \text{const}$ , справедливий закон збереження енергії, де разом із звичайною потенціальною енергією необхідно взяти до уваги і потенціальну енергію, пов'язану з силами інерції. З урахуванням сил інерції рівняння руху нічим не відрізняються від рівнянь руху в ІСВ [8]. Тому закон збереження енергії можна записати таким чином:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{нк}} + A_{\text{ін}}. \quad (5.32)$$

Тобто, приріст енергії тіла дорівнює сумі робіт неконсервативних сил і сил інерції. Аналогічним чином можуть бути записані закон збереження

імпульсу і моменту імпульсу:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \sum \mathbf{F}^{\text{ex}} + \sum \mathbf{F}^{\text{инп}}; \\ \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \sum \mathbf{N}^{\text{ex}} + \mathbf{N}^{\text{инп}}.\end{aligned}\tag{5.33}$$

У першому випадку приріст імпульсу системи дорівнює рівнодійній усіх зовнішніх сил і сил інерції. У другому приріст моменту імпульсу дорівнює моменту усіх зовнішніх сил і сил інерції.

Відцентрова сила – сила консервативна, оскільки (для  $\omega = \text{const}$ ) робота цієї сили залежить від радіус-вектора точки і не залежить від форми траєкторії під час переміщення з точки 1 в точку 2:

$$A_{\text{вц}} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_{\text{вц}} d\mathbf{r} = m\omega^2 \int_{r_1}^{r_2} r dr = m\omega^2 \left( \frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right).\tag{5.34}$$

Тоді для відцентрової сили інерції можна ввести відцентрову потенціальну енергію, спад якої визначає роботу відцентрової сили:

$$\begin{aligned}A_{\text{вц}} &= U_1 - U_2; \\ U_{\text{вц}} &= -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2.\end{aligned}\tag{5.35}$$

### Задачі для самостійного розв'язування

5.1. Клин з гострим кутом  $\alpha$  тягнуть горизонтально з прискоренням  $\mathbf{a}_0$ . Чому дорівнює прискорення тіла, покладеного до клина, відносно землі? Для  $t = 0$  вважати швидкості тіла і клину рівними нулю. Тертям нехтувати.

5.2. Стержень довжиною  $L$ , масою  $M$  шарнірно підвішений за верхню точку в полі сили тяжіння і рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  відносно вертикальній осі. Для якого кута нахилу стержня до вертикалі може відбуватися таке обертання?



## РОЗДІЛ VI

### ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

#### 6.1 Рівняння руху твердого тіла

Твердим тілом називатимемо сукупність матеріальних точок, відстань між якими фіксована [3]. З цього визначення виходить, що рух твердого тіла зводиться до руху його складових точок. Число незалежних змінних (координат) або параметрів, якими можна описати рух системи матеріальних точок, називають числом ступенів свободи. У підрозділі 1.5 було встановлено, що для опису руху твердого тіла необхідно задати шість незалежних параметрів. Досить задати положення будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій, між якими є три співвідношення, що виражають постійність відстаней між цими трьома точками (див. підрозділ 1.5.1). Тому число ступенів свободи твердого тіла дорівнює шести. Ці шість величин можна задати по-різному. Як правило, для опису динаміки твердого тіла використовують три різні декартові системи координат [6]:

1. Лабораторна система координат  $X Y Z$ .
2. Система координат  $x_0 y_0 z_0$ , початок якої пов'язаний з деякою точкою твердого тіла  $O$ , а осі весь час паралельні осям лабораторної системи  $X Y Z$ . Отже, система координат  $x_0 y_0 z_0$  рухається разом з точкою  $O$  твердого тіла відносно системи  $X Y Z$  поступально.
3. Система координат  $x y z$ , початок якої знаходиться в точці  $O$ , як і системи  $x_0 y_0 z_0$ , а осі жорстко пов'язані з твердим тілом.

Для опису руху твердого тіла, що має шість ступенів свободи, необхідно шість скалярних або два незалежні векторні рівняння. Оскільки тверде тіло можна розглядати як сукупність матеріальних точок, до опису

його руху можуть бути застосовані ті рівняння динаміки, які справедливі для опису руху систем матеріальних точок. Одним з таких рівнянь є рівняння руху центру мас. Воно виводиться простим підсумовуванням рівнянь виду

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$$

для кожної з точок, що складають тверде тіло, де  $\mathbf{p}_i$  – імпульс  $i$ -тої точки,  $\mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – зовнішня сила, що діє на неї. Ввівши повний імпульс твердого тіла, як суму імпульсів складових його точок:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{V}_C = M \sum_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i m_i}{m_i} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i m_i = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{P},$$

і сумарну зовнішню силу, як суму усіх зовнішніх сил, що діють на кожну  $i$ -ту точку за правилом  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$ , отримуємо:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ex}}; \quad \mathbf{P} = M \mathbf{V}_C. \quad (6.1)$$

Іншим рівнянням є рівняння моментів:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}^{\text{ex}}, \quad (6.2)$$

у якому

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{N}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{N}_i^{\text{ex}},$$

тобто в це рівняння входять повний момент імпульсу твердого тіла відносно деякої точки і сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до тіла відносно цієї ж точки. Отримані рівняння (6.1, 6.2) записані відносно нерухомої лабораторної системи координат  $X Y Z$ .

Висловимо деякі зауваження загального характеру [1, 6].

1. Як і у разі довільної системи матеріальних точок, внутрішні сили не впливають на рух центру мас і не можуть змінити імпульс твердого тіла,

що було розглянуто вище в підрозділі 2.6, з додатковим припущенням, що внутрішні сили – сили центральні.

2. Вектори  $\mathbf{M}$  і  $\mathbf{N}^{\text{ex}}$  визначені відносно лабораторної системи  $X Y Z$ . Проте у багатьох задачах зручно розглядати ці вектори відносно центру мас рухомого тіла. Покажемо, що в цьому випадку рівняння моментів має формально той же вигляд, що і рівняння (6.2) відносно нерухомої точки. Так, згідно (2.41)

$$\mathbf{M}_O = [\mathbf{R} \mathbf{P}] + \mathbf{M}'_{O'}, \quad (6.3)$$

де  $[\mathbf{R} \mathbf{P}]$  – момент імпульсу системи матеріальних точок як цілого відносно точки  $O$ ;  $\mathbf{P}$  – сумарний імпульс системи матеріальних точок, отриманий вище;  $\mathbf{M}'_{O'} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}'_i]$  – момент імпульсу системи часток відносно точки  $O'$ , що є в цьому випадку точкою центру мас (див. рис. 2.16). За визначенням

$$\mathbf{N}^{\text{ex}} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{R} \mathbf{P}] + \frac{d\mathbf{M}'}{dt} = [\mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{ex}}] + \mathbf{N}'^{\text{ex}} \quad (6.4)$$

згідно (2.44) після перетворень, де  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – результуюча усіх зовнішніх сил, що діють на тверде тіло,  $\mathbf{N}'^{\text{ex}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}'^{\text{ex}} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{M}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] = \frac{d\mathbf{M}'}{dt}$  – сума моментів усіх зовнішніх сил відносно центру мас системи матеріальних точок. Звідси з (6.4) отримуємо:

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} - [\mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{ex}}]. \quad (6.5)$$

Для  $\mathbf{R} = 0$  маємо систему центру мас. Як виходить з (6.5), в цьому випадку

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

Таким чином, рівняння руху, отримані для певного вибору системи відліку, справедливі у будь-якій ІСВ в силу галілеївського принципу відносності. Тому, вибираючи систему відліку, жорстко пов'язану з твердим тілом, точку  $O'$  зручно поміщати в центр мас твердого тіла.

3. Точку прикладення зовнішньої сили можна довільно переносити уздовж лінії, на якій діє сила. Це виходить з того, що в моделі абсолютного твердого тіла нехтують можливими локальними деформаціями. Таке перенесення не вплине також і на момент сил відносно будь-якої точки, оскільки плече в процесі цього не зміниться.

4. Якщо сума зовнішніх сил в (6.1) не залежить від кутової швидкості тіла, а сума моментів імпульсів в (6.2) – від швидкості центру мас, то обидва ці рівняння можна розглядати незалежно одне від одного. Рівняння (6.1) відповідає задачі механіки точки, (6.2) – задачі обертання твердого тіла відносно точки або нерухомої осі.

## **6.2 Типи руху твердого тіла**

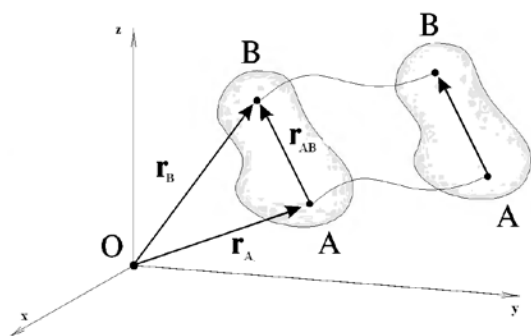
Види руху твердого тіла розглянуті вище в підрозділі 1.5.1. Дамо тут коротку характеристику типам руху твердого тіла. Відомі п'ять видів руху твердого тіла :

- поступальний рух;
- обертання навколо нерухомої осі;
- плоский або плоско-паралельний рух;
- рух твердого тіла з однією нерухомою точкою;
- рух вільного (незакріпленого) твердого тіла.

Розглянемо коротко характеристики кожного з типів руху [6, 27, 28].

1. Поступальний рух – це рух, під час якого будь-який виділений в твердому тілі відрізок в процесі переміщення залишається завжди

паралельним самому собі (рис. 6.1). Число ступенів свободи в цьому



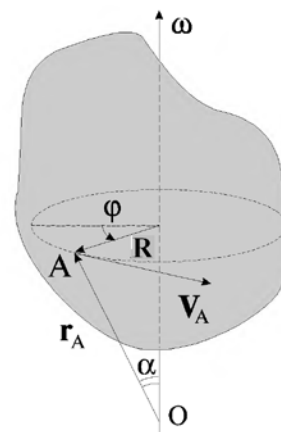
**Рис. 6.1. Поступальний рух твердого тіла**

випадку дорівнює трьом, оскільки досить описати рух якої-небудь однієї точки, наприклад, точки A. Траєкторія всіх інших точок, наприклад, точки B, може бути отримана паралельним перенесенням. Для опису такого руху досить рівняння

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ex}},$$

яке задає рух центру мас цього тіла і визначає закон руху  $\mathbf{R}_A = \mathbf{R}(t)$ .

2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Цей тип руху детально був розглянутий в підрозділі 1.5.2 Розділу I «Кінематика». В цьому випадку тверде тіло має один ступінь свободи, пов'язаний з кутом повороту навколо осі. Всі точки тіла рухаються по колах, що лежать в площинах, перпендикулярних осям обертання. Центри кіл лежать на цій осі (рис. 6.2). Для опису руху використовують кутові кінематичні характеристики, однакові для всіх точок тіла, а лінійні характеристики руху пов'язані з кутовими:



**Рис.6.2. Обертальний рух твердого тіла**

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}; \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (6.6)$$

3. Плоский рух твердого тіла. Це такий рух, під час якого проєкції усіх його точок лежать в паралельних площинах. У підрозділі 1.5.3 було показано, що такий рух є суперпозицією двох рухів: обертального навколо миттєвої осі обертання, і поступального. Як приклад, можна привести

детально розглянуте в тому ж підрозділі 1.5.3 кочення без ковзання колеса по площині. Центр колеса рухається прямолінійно, точка М, через яку проходить миттєва вісь обертання, описує циклоїду (рис. 6.3). За відсутності ковзання миттєва швидкість цієї точки дорівнює нулю. Це і дає можливість розглядати кочення колеса як суперпозицію поступального і обертального рухів. В процесі такого руху, згідно з теоремою про додавання швидкостей (1.29):

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{відн}}.$$

Швидкість будь-якої точки А твердого тіла можна представити згідно формули (1.32, див. рис. 1.22):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'],$$

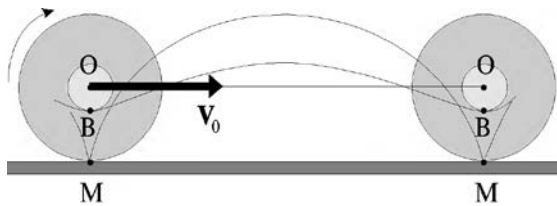


Рис. 6.3. Плоский рух колеса

де  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ , а  $\boldsymbol{\omega}$  – кутова швидкість

обертання навколо миттєвої осі, що проходить через точку  $O'$  на рис. 1.22. Тут  $\mathbf{v}_0$  – переносна швидкість,  $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']$  – відносна швидкість. Число

ступенів свободи такого руху – шість, число рівнянь для опису такого руху – два.

4. Рух твердого тіла з однією нерухомою точкою – це рух дзиги або гіроскопа із закріпленням на площині вістрям, щоб уникнути прослизання. Для опису руху таких тіл використовують кути Ейлера і рівняння Ейлера.

5. Рух вільного твердого тіла – будь-які переміщення твердого тіла відносно осей координат. У найзагальнішому випадку має шість ступенів свободи, характер руху – суперпозиція поступального і обертального рухів.

Як виходить з розглянутого вище, рівняння поступального руху

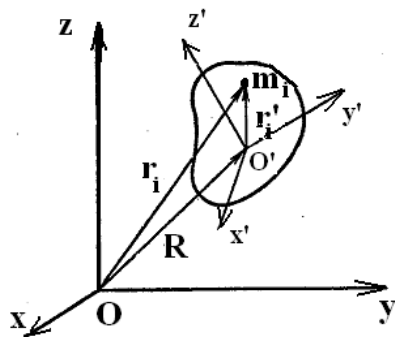
твердого тіла має вигляд рівняння руху нерелятивістської частинки з масою, рівною масі твердого тіла під дією результуючої зовнішньої сили  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$ . Тому специфічні особливості руху твердого тіла пов'язані тільки з його обертанням. Розглянемо **динаміку обертального руху**, вибравши центр мас твердого тіла як початок системи координат, пов'язаної з тілом.

### 6.3 Момент імпульсу твердого тіла.

#### Моменти інерції. Тензор інерції

Для опису динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання (в цьому випадку тіло має один ступінь свободи, пов'язаний з кутом його повороту) використовують рівняння моментів:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (6.7)$$



**Рис. 6.4. Рух твердого тіла** імпульсу відносно точки  $O'$  центру мас справедливе рівняння (6.3). У будь-який момент часу для виділеної елементарної маси  $m_i$  за теоремою про додавання швидкостей:

$$\mathbf{v}_{i\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{i\text{відн}}.$$

В цьому випадку, згідно (1.32)

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{R}} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i],$$

де  $\mathbf{v}_{i\text{абс}} = \dot{\mathbf{r}}_i$ ;  $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \dot{\mathbf{R}}$ ;  $\mathbf{v}_{i\text{відн}} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_{i\text{відн}}]$ . Звідси виходить, що

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R}\mathbf{P}] + \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]],$$

де  $\sum_i m_i [\mathbf{r}'_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]] = \mathbf{M}'$  – момент імпульсу, пов'язаний з рухом точок відносно центру мас, а  $\boldsymbol{\omega}$  – миттєва вісь обертання, що проходить через центр мас. Якщо  $\mathbf{R} = 0$ , рух тіла – це рух його відносно миттєвої осі, що проходить через центр мас як точку закріплення, а  $\boldsymbol{\omega}$  – його кутова швидкість. З урахуванням постійності відстаней між точками в твердому тілі вектор  $\mathbf{M}$  можна зв'язати з вектором кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$ . Напрямок вектора  $\boldsymbol{\omega}$  визначає орієнтацію осі обертання, яка проходить через центр мас, і може не співпадати в загальному випадку з напрямком вектора моменту імпульсу, що підтверджується таким **прикладом** [6].

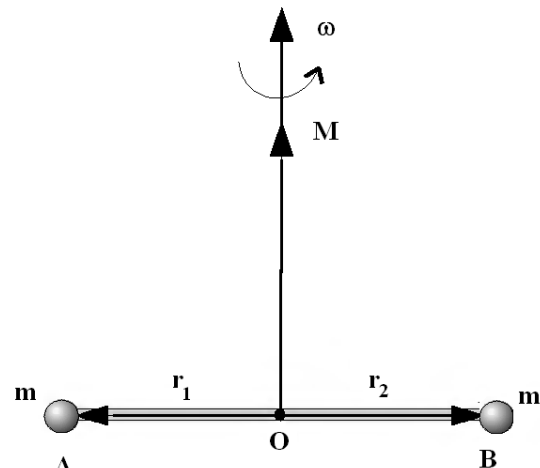
Нехай дві однакові за масою точки укріплені на кінцях невагомому стержня. Стержень обертається з кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\omega}$  навколо вертикальної осі, що проходить через середину стержня перпендикулярно цьому стержню (рис. 6.5). В цьому випадку для моменту імпульсу системи відносно точки О маємо:

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1] + m[\mathbf{r}_2 \mathbf{v}_2] = 2m[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]].$$

Тут враховано, що  $r = r_1 = r_2$ , а  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ . У виразу для моменту імпульсу  $\mathbf{M}$  розкриємо подвійний векторний добуток:

$$\mathbf{M} = 2m[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] = 2m(\boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})).$$

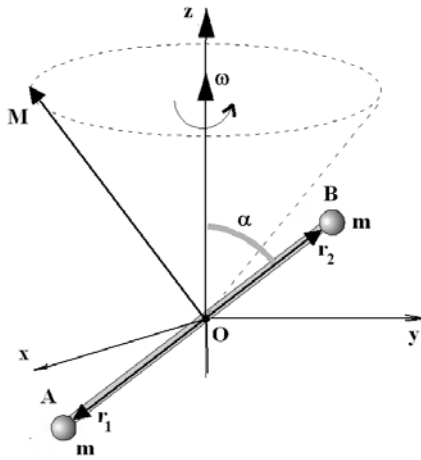
Оскільки кутова швидкість  $\boldsymbol{\omega}$  перпендикулярна до радіус-вектора точок А і В на стержні,  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$ , то скалярний добуток векторів  $(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}) = 0$ . Тоді



**Рис. 6.5.** Обертання стержня навколо осі, перпендикулярної стержню



$\mathbf{M} = 2m\omega r^2$  і видно, що  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\omega}$ . Тобто, напрям векторів  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  співпадають, і це суттєво.



**Рис. 6.6.** Обертання стержня навколо осі, розташованої під кутом до стержня

Проте, це окремий випадок, який реалізується не завжди. Нехай цей же стержень закріплений в точці  $O$  під деяким кутом  $\alpha$  до вертикальної осі і розташований в площині  $xoy$  (рис. 6.6). Під час обертання стержня з кутовою швидкістю  $\omega$  вектор  $\mathbf{M}$ , визначений виразом

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1] + m[\mathbf{r}_2 \mathbf{v}_2] = 2m[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]],$$

складатиме з віссю обертання кут  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Система координат  $x y z$ , введена в підрозділі 6.1 і жорстко пов'язана із стержнем, обертається разом з ним. Тут вектор  $\mathbf{M}$  залишається в площині  $Oyz$ , а в лабораторній системі рухається по конічній поверхні з кутом  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Таким чином, видно, що напрями обертання векторів  $\boldsymbol{\omega}$  і  $\mathbf{M}$  не співпадають.

Знайдемо вираз для моменту імпульсу  $\mathbf{M}$  у разі твердого тіла довільної форми, закріпленого в деякій точці  $O$  [6, 13, 27]. Вважатимемо, що тіло складається з окремих матеріальних точок з масами  $m_i$ . Нехай  $\mathbf{r}_i$  – радіус-вектор елементарної маси  $m_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – кутова швидкість. Обчислимо момент імпульсу тіла відносно точки  $O$ :

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]] = \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})]. \quad (6.8)$$

Вектори  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}_i$  спроектуємо на осі координатної системи, жорстко пов'язаної з твердим тілом. На відміну від лабораторної системи  $X Y Z$

проекції цих величин на осі координатної системи  $x y z$  є постійними величинами, а в системі  $X Y Z$  проекції залежать від часу. У системі  $x y z$  твердого тіла компоненти векторів  $\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}$  мають вигляд  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i); \boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . В цьому випадку (6.8) можна переписати, підставивши в скалярний добуток  $(\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})$  компоненти цих векторів:

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i \left[ \boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right]. \quad (6.9)$$

Спроектуємо вектор  $\mathbf{M}$  на осі координатної системи  $x y z$  і запишемо послідовно вирази для  $M_x, M_y, M_z$ :

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_i m_i \left[ \omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] = \\ &= \sum_i m_i \omega_x r_i^2 - \sum_i m_i x_i^2 \omega_x - \sum_i m_i x_i y_i \omega_y - \sum_i m_i x_i z_i \omega_z = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i; \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$M_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i; \quad (6.11)$$

$$M_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2). \quad (6.12)$$

Перепишемо (6.10 – 6.12) таким чином:

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z; \\ M_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z; \\ M_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \end{aligned} \quad (6.13)$$

де  $I_{kl}$  – компоненти (9 компонент) матриці – тензора інерції  $\mathbf{I}$  твердого тіла відносно точки  $O$ , в якій:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2); \quad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i; \quad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i; \\ I_{yx} &= -\sum_i m_i y_i x_i; \quad I_{yy} = \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2); \quad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i; \end{aligned}$$

$$I_{zx} = -\sum_i m_i z_i x_i; I_{zy} = -\sum_i m_i z_i y_i; I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2). \quad (6.14)$$

Таким чином, як виходить з отриманих вище формул, момент імпульсу твердого тіла, обчислений відносно довільної точки досить складно залежить від розподілу маси в тілі, а його напрям в загальному випадку не співпадає з кутовою швидкістю. Сукупність величин (6.14) записують у вигляді матриці виду

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

яку називають тензором інерції.

Величини  $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}, I_{zz}$  в цій матриці називають моментами інерції відносно вибраного правила їх розрахунку. Моменти інерції змінюються в процесі зміни орієнтації тіла відносно координатних осей. Величини в (6.15), що розташовані на діагоналі матриці ( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ), називають діагональними елементами тензора, а інші – недиагональні. Діагональні елементи дістали назву осьові моменти інерції, а недиагональні – відцентрові. Як видно з їх визначення (6.14)

$$I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}.$$

Такий тензор називають симетричним, оскільки ці елементи розташовані симетрично відносно діагоналі. У компактному алгебраїчному записі вираз для моменту імпульсу запишеться таким чином:

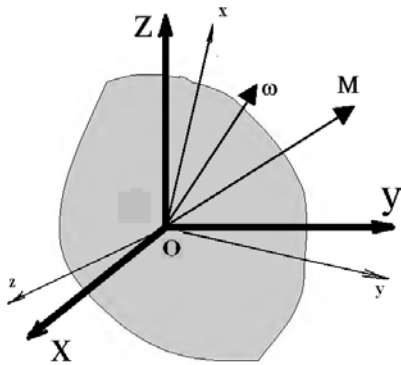
$$M_k = \sum_{l=1}^3 I_{kl} \omega_l, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (6.16)$$

У символічному векторному виді це можна записати як:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (6.17)$$

Отже, дев'ять величин, шість з яких незалежні, визначають однозначно

зв'язок між векторами  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$ , і в загальному випадку напрям  $\mathbf{M}$  не співпадає з напрямом  $\boldsymbol{\omega}$  (рис. 6.7).



**Рис. 6.7. Неспівпадання напрямів векторів моменту імпульсу і кутової швидкості**

Оскільки з'явилася нова фізична величина – тензор, яка має важливе значення у фізиці, коротко розглянемо, що це за величина. У математиці за допомогою тензора здійснюють лінійне перетворення елементів одного лінійного простору в елементи іншого лінійного простору. Для завдання тензора в загальному випадку потрібні 9 чисел (на відміну від вектора, де для його завдання потрібно 3 числа). Тензор – багатокomпонентна величина, що характеризується певним правилом перетворення в процесі переходу з однієї системи координат в іншу. В цьому випадку компоненти тензора інерції перетворюються як добутки відповідних координат.

Необхідність введення тензорних величин у фізиці часто обумовлена анізотропією властивостей фізичних макроскопічних об'єктів. Тензор пов'язує дві векторні величини, які пропорційні один одному за модулем, але в силу анізотропії властивостей об'єкту не співпадають за напрямком. В цьому випадку зв'язків  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  вирішальну роль грає «анізотропія» форми тіла – відсутність певної симетрії відносно осей системи координат  $x, y, z$ . В інших випадках це може бути, наприклад, анізотропія електричних або магнітних властивостей речовини. Так, вектори поляризації речовини  $\mathbf{P}$  і напруженості поля  $\mathbf{E}$  пов'язані тензором поляризації  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}$ , тобто з причини анізотропії електричних властивостей речовина поляризується не за полем, тобто не за полем зміщуються позитивні і негативні заряди в молекулах речовини. Прикладами також є діелектрична і магнітна

проникаюча здатність речовини.

Вирази (6.13) і (6.16) допускають також запис в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

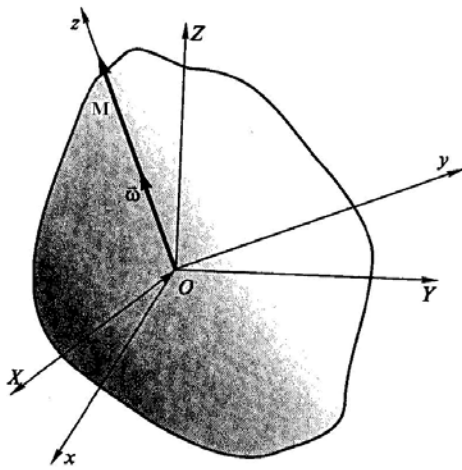
#### 6.4 Головні і центральні головні осі інерції

Розглянемо питання про те, чи можливий для довільного твердого тіла випадок, коли вектори  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  співпадають за напрямком. Виявляється, що для будь-якого твердого тіла і будь-якої точки  $O$  є принаймні три взаємно перпендикулярні напрями вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (або три взаємно перпендикулярні осі обертання), для яких напрями  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  співпадають. Такі осі називають головними осями інерції тіла. Якщо осі  $ox, oy, oz$  системи координат, пов'язаної з твердим тілом, поєднати з головними осями інерції тіла, то тензор інерції матиме вигляд:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Величини  $I_{xx} = I_x, I_{yy} = I_y, I_{zz} = I_z$  в цьому випадку називають **головними моментами інерції** твердого тіла. Про тензор в цьому випадку говорять, що він приведений до діагонального виду. Таким чином, якщо осі системи координат спрямовані уздовж головних осей інерції твердого тіла, то відцентрові (недіагональні) моменти інерції відсутні. В цьому випадку (рис. 6.8)

$$M_x = I_x \omega_x; \quad M_y = I_y \omega_y; \quad M_z = I_z \omega_z.$$



**Рис. 6.8. Напрям векторів моменту імпульсу і кутової швидкості для головних осей інерції**

Тобто, якщо вектор  $\omega$  спрямований уздовж однієї з головних осей, то вектор  $\mathbf{M}$  спрямований аналогічним чином. Процес знаходження головних осей зводиться до математичної процедури діагоналізації тензора [1, 27]. Як правило, через будь-яку точку твердого тіла завжди можна провести три взаємно перпендикулярні головні осі. Головні моменти інерції  $I_x, I_y, I_z$  будуть різні для різних точок. Якщо ж точка  $O$  –

центр мас тіла, тобто, якщо головні осі проведені через центр мас, то такі осі називаються **центральними головними осями**, тензор – центральним тензором а його компоненти – це головні моменти інерції тіла. Немає сенсу говорити про головні моменти інерції, не вказавши точки тіла, через які проведені головні осі. Якщо головні осі інерції відомі, то величини головних моментів інерції можна вирахувати, виходячи з розподілу маси тіла, наприклад:

$$I_x = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2).$$

Як визначити головні осі інерції для вибраної точки  $O$ ? Якщо система координат  $x y z$ , що пов'язана з твердим тілом, вибрана довільно, то в загальному випадку осі  $ox, oy, oz$  не співпадають з головними осями інерції. Такого збігу можна досягти деяким поворотом початкової системи координат відносно твердого тіла. В нових координатах матриця  $I_{kl}$  стає діагональною. В багатьох випадках головні осі легко вдається визначити з розумінь симетрії. Центральні головні осі визначають за допомогою таких же розумінь, але провести їх потрібно через центр мас.

Отже, розглянуті вище величини тензора моменту інерції були отримані відносно довільної точки  $O$ , як точки закріплення, через яку проходить миттєва вісь обертання, оскільки момент імпульсу твердого тіла був визначений відносно деякої точки.

## 6.5 Момент імпульсу і момент інерції відносно осі

У тих випадках, коли тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, вводять поняття моменту імпульсу і моменту інерції відносно осі.

Момент імпульсу  $M_{\parallel}$  відносно осі – це проекція на цю вісь вектора моменту імпульсу  $\mathbf{M}$ , визначеного відносно деякої точки  $O$ , належної осі, причому вибір точки  $O$  не має значення [6, 8, 27].

Момент імпульсу, визначений відносно довільної точки  $O$  був отриманий вище (див. формулу (6.8)):

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]] = \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})].$$

Як видно з приведенного виразу, момент імпульсу тіла складається з моментів імпульсів його окремих точок. Для будь-якої  $i$ -тої точки масою  $m_i$  проекція її моменту імпульсу на вісь  $O'O''$  є:

$$(\mathbf{M}_i)_{|O'O''} = (m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i])_{|O'O''} = m_i r'_i v_i,$$

де  $\mathbf{r}'_i$  – найкоротша відстань точки масою  $m_i$  до осі, тобто перпендикуляр, опущений з точки  $m_i$  на вісь  $O'O''$ , і  $\mathbf{r}'_i \perp \mathbf{v}_i$  лінійної швидкості точки (рис. 6.9). У свою чергу  $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]$ . Тоді:

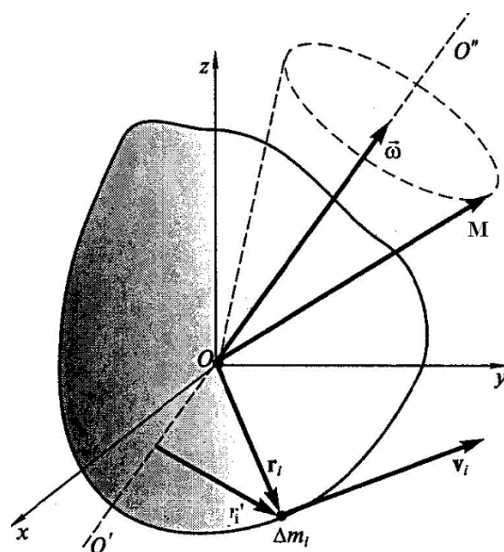


Рис. 6.9. До визначення моменту імпульсу відносно осі

$$(\mathbf{M}_i)|_{O'O''} = m_i [\mathbf{r}'_i [(\boldsymbol{\omega})|_{O'O''} \mathbf{r}'_i]] = m_i (\boldsymbol{\omega})|_{O'O''} r_i'^2, \quad (6.20)$$

оскільки  $\mathbf{r}'_i \perp \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{r}'_i \perp \boldsymbol{\omega}$  і скалярний добуток останніх двох векторів розкриттям подвійного векторного добутку в (6.20) перетворюється на нуль. Отже, для будь-якої довільної точки  $m_i$

$$(\mathbf{M}_i)|_{O'O''} = I_i(\boldsymbol{\omega})|_{O'O''},$$

де  $I_i = m_i r_i'^2$  – момент інерції цієї точки відносно осі  $O'O''$ . Момент інерції всього твердого тіла відносно цієї осі, дорівнюватиме сумі моментів інерцій усіх його точок відносно цієї осі:

$$(\mathbf{M})|_{O'O''} = \sum_i (\mathbf{M}_i)|_{O'O''} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega})|_{O'O''} r_i'^2,$$

і точка  $O$  належить осі  $O'O''$ . Для векторів  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  це співвідношення запишеться як:

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\omega},$$

де  $I = \sum_i m_i r_i'^2$  – момент інерції твердого тіла відносно осі  $O'O''$ .

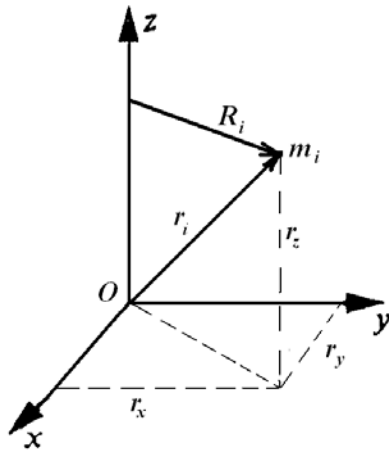


Рис. 6.10. До визначення моменту імпульсу відносно осі  $z$

Розглянемо обчислення моментів інерції відносно осей координат, які жорстко пов'язані з тілом і проходять через головні осі інерції:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2); \\ I_y &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Особливе значення має величина моменту інерції тіла відносно осі  $z$  (рис. 6.10):

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i R_i^2,$$



Звідси маємо, що

$$I_x + I_y + I_z = \sum_i m_i (2x_i^2 + 2y_i^2 + 2z_i^2) = 2 \sum_i m_i r_i^2.$$

Для плоского розподілу мас (тобто в площині  $x, y$ , для  $z = 0$ ) маємо:

$$I_x + I_y + I_z = \sum_i m_i (2x_i^2 + 2y_i^2) = 2I_z. \quad (6.23)$$

Звідси виходить, що

$$I_x + I_y = I_z.$$

## 6.6 Обчислення моментів інерції

Для обчислення моментів інерції, як діагональних, так і відцентрових, необхідно знати щільність тіла  $\rho(x, y, z) = \rho(\mathbf{r})$ . Обчислення моменту інерції відносно якої-небудь осі зводиться до обчислення інтеграла:

$$I_{O'O''} = \int_m r'^2 dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) r'^2 dV = \int_V \rho(x, y, z) r'^2 dx dy dz,$$

де  $r'$  – відстань елемента маси  $dm$  до осі обертання, відносно якої ведеться розрахунок. Наприклад:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(x, y, z) (r^2 - x^2) dV = \int_V \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz; \\ I_{yy} &= \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dx dy dz; \quad I_{zz} = \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz; \\ I_{xy} &= - \int_V \rho(x, y, z) xy dx dy dz; \quad I_{zy} = - \int_V \rho(x, y, z) yz dx dy dz; \\ \rho(x, y, z) &= \frac{dm}{dV}; \quad dm = \rho(x, y, z) dV, \end{aligned} \quad (6.24)$$

і так далі [1, 2, 8, 11, 13, 27].

Як **приклад** [2, 3], обчислимо моменти інерції деяких симетричних тіл.

1. Момент інерції нескінченно тонкого однорідного кільця радіуса  $R$

відносно осі, перпендикулярної площині кільця.

Нехай маса кільця  $m$ . Осі координат, жорстко пов'язані з кільцем, виберемо так, щоб кільце лежало в площині  $(x, y)$ , а вісь  $z$  була перпендикулярна площині кільця.

Введемо лінійну щільність матеріалу кільця  $\rho = \frac{m}{2\pi R}$  як відношення його маси до довжини

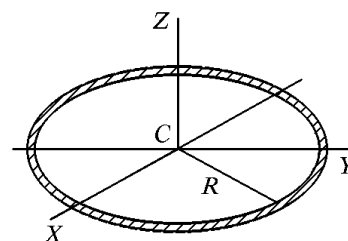


Рис. 6.11. До розрахунку моменту інерції кільця

кола кільця. Виділимо елементарну масу кільця  $dm = \rho dl$ , де  $dl$  – елементарна довжина кола кільця (рис. 6.11). Момент інерції виділеної елементарної маси відносно осі  $z$ :

$$dI_z = R^2 dm = R^2 \rho dl.$$

Момент інерції кільця буде інтегралом від  $dI_z$  по довжині кола:

$$I_z = \int_0^{2\pi R} R^2 \rho dl = R^2 \rho 2\pi R = R^2 \frac{m}{2\pi R} 2\pi R = mR^2. \quad (6.25)$$

З симетрії задачі видно, що  $I_x = I_y$ ,  $I_z = 2I_x$ ,  $I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{mR^2}{2}$ .

2. Момент інерції тонкого однорідного стержня відносно осі, що проходить через цей стержень, і яка перпендикулярна цьому стержню.

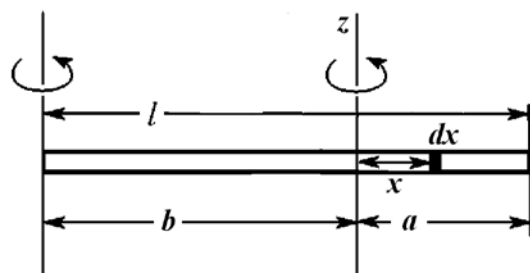


Рис. 6.12. До розрахунку моменту інерції стержня

Нехай маса стержня  $m$ , довжина  $l$ . Введемо лінійну щільність стержня, як відношення маси стержня до його довжини  $\rho = \frac{m}{l}$ . Елементарна маса, що

міститься на елементарному відрізку

$dx$  стержня, є  $dm = \rho dl = \frac{m}{l} dx$  (рис. 6.12). Момент інерції елементарної

маси  $dm$ , віддаленої на відстань  $x$  від осі обертання, є  $dI = x^2 \frac{m}{l} dx$ .

Момент інерції стержня буде інтегралом від  $dI$  по довжині стержня:

$$I = \int_{-b}^a \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \left( \frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \right)$$

для вибраного положення елементарної маси відносно осі. Отримана формула є найбільш загальною для довільного розташування осі обертання відносно кінців стержня. В окремому випадку для  $a = b = \frac{l}{2}$ , тобто коли вісь обертання проходить через середину стержня, маємо:

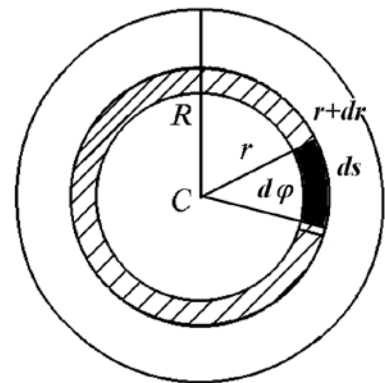
$$I = \frac{ml^2}{12}. \quad (6.26)$$

У іншому окремому випадку, коли вісь обертання проходить через один з країв стержня, тобто для  $a = l, b = 0$  отримуємо:

$$I = \frac{1}{3} ml^2. \quad (6.27)$$

3. Момент інерції тонкого суцільного однорідного диска радіуса  $R$  відносно осі, що проходить через центр, і яка перпендикулярна диску.

Нехай маса диска  $m$ . Маса диска рівномірно розподілена в площині  $(x, y)$ , тому задача обчислення моменту інерції – двовимірна. Введемо поверхневу щільність як відношення маси диска до його площі  $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ . Виділимо елементарний сегмент диска з площею  $ds$ , розташований між колами з радіусами від  $r$  до  $r + dr$ , і який має кут розхилу  $d\varphi$ , та обчислимо його площу в полярній системі координат на площині (рис. 6.13):



**Рис. 6.13. До розрахунку моменту інерції однорідного диска**

$$ds = r dr d\varphi,$$

де  $r$  – відстань сегмента до центру диска. Момент інерції цього сегмента відносно осі  $z$ , що проходить через його центр і перпендикулярній площини диска:  $dI_z = r^2 \sigma ds = r^2 \sigma r dr d\varphi$ . Момент інерції диска обчислимо як подвійний інтеграл по двох змінних:

$$I_z = \int_S r^2 \sigma r dr d\varphi = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{2}. \quad (6.28)$$

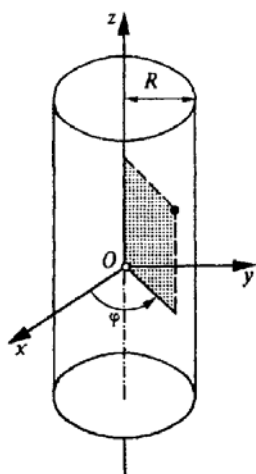


Рис. 6.14. До розрахунку моменту інерції циліндра

З симетрії задачі виходить

$$I_x = I_y, \quad I_z = 2I_x, \quad I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{mR^2}{4}.$$

4. Момент інерції однорідного суцільного циліндра радіуса  $R$  і висоти  $h$  відносно осі, яка співпадає з його віссю [1].

Нехай маса циліндра дорівнює  $m$ . У цій задачі маса розподілена однорідно в тривимірному просторі. Введемо щільність циліндра як відношення маси до його об'єму  $\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$ . Подальші обчислення

проведемо в циліндричній системі координат, вісь симетрії якої спрямована уздовж осі  $z$  (рис. 6.14):

$$dm = \rho dx dy dz; \quad dx dy = r dr d\varphi; \quad dV = r dr d\varphi dz;$$

$$dI = \rho r^3 dr d\varphi dz; \quad I = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho h \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{2}. \quad (6.29)$$

Як виходить з розрахунків, момент інерції суцільного однорідного диска і однорідного циліндра відносно однієї і тієї ж осі  $z$  співпадають.

5. Момент інерції однорідної кулі радіуса  $R$  [6].

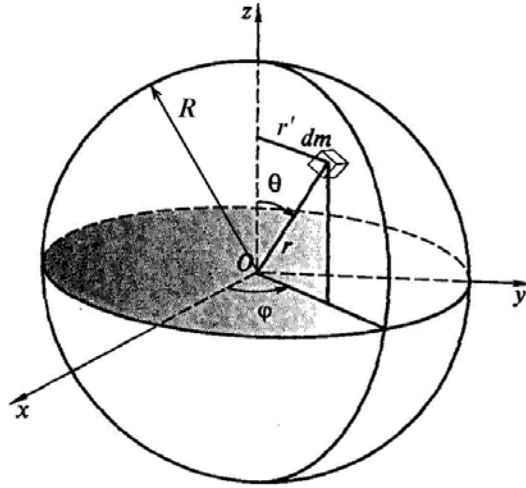
Обчислення зручно проводити в сферичній системі координат.

Змінними в сферичній системі координат є радіус-вектор  $r$ , кути  $\varphi, \theta$ .

Нехай маса кулі  $m$ . Щільність кулі  $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ . Елементарна маса, яка

міститься в елементарному об'ємі  $dV = r^2 dr \sin\theta d\varphi d\theta$  є (рис. 6.15):

$$dm = \rho dV = \rho r^2 dr \sin\theta d\varphi d\theta.$$



**Рис. 6.15.** До обчислення моменту інерції однорідної кулі  
Момент інерції елементарного об'єму відносно осі  $z$ :

$$dI = r'^2 dm = \rho r^4 \sin^3\theta dr d\varphi d\theta.$$

В цьому випадку відстань елементарної маси від осі обертання  $r' = r \sin\theta$ .

Інтегрування дає такий результат:

$$I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{2}{5} m R^2. \quad (6.30)$$

Зупинимося детальніше на обчисленні останнього інтеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta &= \int_0^\pi \sin\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta - \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \\ &= -\cos\theta \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2\theta d(\cos\theta) = -(-1 - 1) + \frac{1}{3} \cos^3\theta \Big|_0^\pi = \\ &= 2 + \frac{1}{3}(-1 - 1) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

З розуміння симетрії виходить:  $I_x = I_y = I_z = I = \frac{2}{5}mR^2$ .

## 6.7 Теорема Гюйгенса – Штейнера

Ця теорема пов'язує моменти інерції відносно двох паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас тіла. Знайдемо зв'язок між моментами інерції тіла відносно двох вказаних осей.

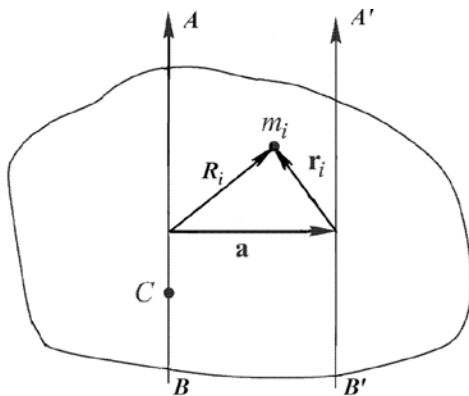


Рис. 6.16. До доведення теореми Гюйгенса-Штейнера

Нехай момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, буде  $I_0$ . Тоді момент інерції відносно паралельної осі, яка не проходить через центр мас, є  $I = I_0 + ma^2$ , де  $m$  – маса тіла,  $a$  – довжина радіус-вектора, що зв'язує між собою відстань між двома даними осями. Доведемо це [2].

Нехай  $AB$  – вісь, яка проходить через центр мас,  $A'B'$  – вісь, паралельна осі  $AB$ ,  $\mathbf{R}_i$  – радіус-вектор відносно осі  $AB$  точки з масою  $m_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  – те ж саме відносно осі, паралельної осі  $AB$  і яка не проходить через центр мас. Нехай  $\mathbf{a}$  – радіус-вектор, який показує відстань між осями  $AB$  і  $A'B'$ ,  $I_0$  – момент інерції тіла відносно осі  $AB$ . Вектори  $\mathbf{R}_i$  і  $\mathbf{r}_i$  перпендикулярні осям  $AB$  і  $A'B'$ . За визначенням,  $I_0 = \sum_i m_i R_i^2$  – момент інерції тіла відносно осі  $AB$ ,  $I = \sum_i m_i r_i^2$  – момент інерції відносно осі  $A'B'$ . На рис. 6.16 безпосередньо видно, що у будь-який момент часу

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$$

Звідси отримуємо:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{a};$$

$$r_i^2 = R_i^2 + a^2 - 2aR_i.$$

Підставляючи цей вираз у момент інерції  $I = \sum_i m_i r_i^2$ , отримуємо:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R_i^2 + \sum_i m_i a^2 - 2 \sum_i m_i a R_i =$$

$$= \sum_i m_i R_i^2 + a^2 \sum_i m_i - 2 \sum_i m_i a R_i.$$

Оскільки вісь АВ проходить через центр мас, то сума  $\sum_i m_i R_i = 0$  – за визначенням осі, що проходить через центр мас. Підсумовування  $\sum_i m_i = m$  дає масу тіла. Звідси виходить, що

$$I = I_0 + ma^2. \quad (6.31)$$

Теорема доведена. Таким чином, момент інерції тіла відносно якої-небудь осі дорівнює моменту інерції цього тіла відносно паралельної осі, що проходить через центр мас плюс величина  $ma^2$ , де  $\mathbf{a}$  – відстань між осями. Знаючи момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас, можна легко обчислити момент інерції тіла відносно будь-якої іншої осі, яка паралельна осі, що проходить через центр мас.

### Приклади

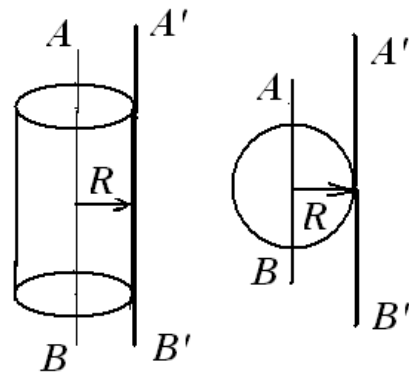
1. Момент інерції циліндра відносно осі А'В', що проходить через бічну поверхню (рис. 6.17). Як відомо

$$I_0 = \frac{1}{2} mR^2. \text{ Для осі, що проходить через}$$

бічну поверхню, отримуємо:

$$I = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

2. Момент інерції суцільної однорідної кулі відносно осі А'В', яка дотична до



**Рис. 6.17.** До застосування теореми Гюйгенса-Штейнера

його бічної поверхні (рис. 6.17):

$$I = I_0 + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2.$$

## 6.8 Основне рівняння динаміки обертального руху

Розглянемо **рівняння моментів** під час обертання твердого тіла (6.2), в якому  $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$  – сумарний момент імпульсу твердого тіла відносно деякої точки,  $\mathbf{N}^{ex} = \sum_i \mathbf{N}_i^{ex}$  – сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до тіла, відносно цієї ж точки. Розглянуте рівняння описує обертальний рух твердого тіла **навколо точки** закріплення як миттєвої осі обертання.

У разі обертання твердого тіла навколо **нерухомої осі**  $O'O''$  його рух описують рівнянням, з урахуванням зв'язку між векторами  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}; \quad \frac{d(\mathbf{M})|_{O'O''}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = \sum_i (\mathbf{N}_i^{ex})|_{O'O''} = (\mathbf{N}^{ex})|_{O'O''}. \quad (6.32)$$

В цьому рівнянні  $I = \sum_i m_i r_i'^2$  – момент інерції тіла відносно осі обертання,  $(\mathbf{M})|_{O'O''}$  – момент імпульсу відносно осі обертання, тобто проекція моменту імпульсу тіла, визначеного відносно деякої точки, що належить осі, на вісь обертання;  $(\mathbf{N}^{ex})|_{O'O''}$  – сумарний момент зовнішніх сил відносно осі обертання, тобто проекція результуючого моменту зовнішніх сил, визначеного відносно деякої точки, що належить осі, на вісь обертання. В обох випадках вибір точки на осі значення не має (рис. 6.18). Для однорідного симетричного тіла вектор моменту імпульсу відносно осі співпадає за напрямом з вектором  $\boldsymbol{\omega}$ . В цьому випадку

$$(\mathbf{M})|_{O'O''} = \sum_i (\mathbf{M}_i)|_{O'O''} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega})|_{O'O''} r_i'^2,$$



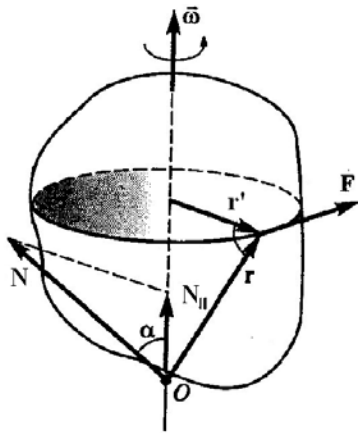


Рис. 6.18 Обертання тіла навколо нерухомої осі

де  $(M)|_{O'O''}$  – момент імпульсу відносно осі обертання, тобто проекція на вісь моменту імпульсу,  $r'_i$  – найкоротша відстань елементарної маси  $m_i$  від осі обертання і-тої частинки,  $\omega$  – кутова швидкість обертання. Звідси і отримуємо

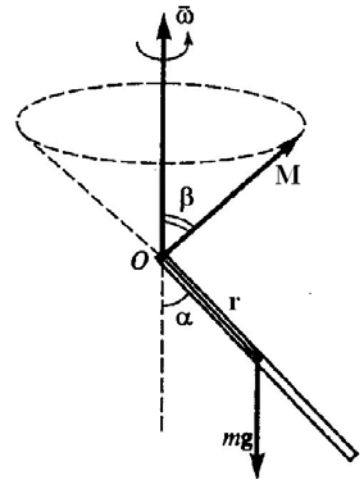


Рис. 6.19. Обертання стержня

Для твердого тіла момент інерції є постійною величиною, і рівняння (6.32) можна переписати як

$$I \frac{d\omega_{O'O''}}{dt} = N_{O'O''}^{\text{ex}}. \quad (6.33)$$

Це і є основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі  $O'O''$ . У векторній формі це рівняння має вигляд:

$$I \frac{d\omega}{dt} = N_{O'O''}, \quad (6.34)$$

де вектор  $\omega$  спрямований уздовж осі обертання,  $N_{O'O''}$  – складова вектора моменту сили уздовж осі обертання. У випадку  $N_{O'O''} = 0$  отримуємо, що  $\omega = \text{const}$ , момент імпульсу відносно осі зберігається, але сам вектор  $M$ , визначений відносно якої-небудь точки на осі обертання, може змінюватися.

Розглянемо приклад такого руху [6, 8].

Стержень жорстко закріплений на вертикальній осі під кутом  $\alpha$ . Під час обертання стержня навколо цієї осі вектор моменту імпульсу  $M$  відносно

точки  $O$  рухається по конусу з кутом  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  (рис. 6.19), але проекція  $\mathbf{M}$  на вертикальну вісь стала, оскільки проекція моменту сили тяжіння відносно осі дорівнює нулю.

## 6.9 Робота, потужність і кінетична енергія обертального руху

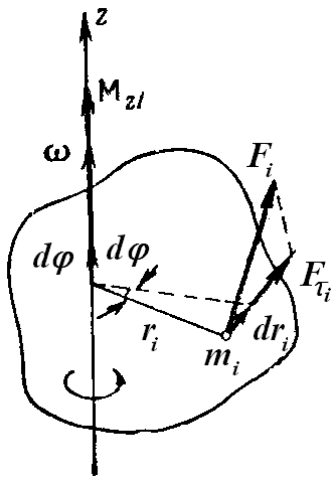


Рис. 6.20. Обертання  
твердого тіла під дією  
зовнішньої сили

Отримаємо енергетичні співвідношення для твердого тіла, що обертається відносно нерухомій осі під дією зовнішньої сили. Виділимо в твердому тілі елементарну масу  $m_i$ . Розглянемо дію зовнішньої сили на виділену елементарну масу. Елементарна робота сили  $\mathbf{F}$  в процесі переміщення  $d\mathbf{r}_i$  маси  $m_i$  можна представити, як (рис.6.20)

$$\delta A_i = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i,$$

де

$$d\mathbf{r}_i = [d\phi \mathbf{r}_i],$$

$d\phi$  – елементарний поворот навколо осі на елементарний кут  $d\phi$ ,  $\mathbf{r}_i$  – радіус-вектор елементарної маси  $m_i$  відносно осі повороту. Звідси:

$$\delta A_i = (\mathbf{F}_i [d\phi \mathbf{r}_i]) = (d\phi [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i]) = (d\phi \mathbf{N}_i). \quad (6.35)$$

У (6.35) використаний той факт, що в змішаному добутку векторів циклічна заміна співмножників не змінює цієї величини. Підсумувавши цей вираз по усіх елементарних масах, отримаємо елементарну роботу, здійснену над твердим тілом в процесі повороту на елементарний кут  $d\phi$ :

$$\delta A = \sum_i \delta A_i = \sum_i (d\phi \mathbf{N}_i) = d\phi \mathbf{N},$$

де  $\mathbf{N}$  – сумарний момент усіх зовнішніх сил, що діють на тіло. Якщо розділити обидві частини отриманого рівняння на  $dt$ , то отримаємо:

$$\frac{\delta A}{dt} = \mathbb{P} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{N} = N_x \omega_x + N_y \omega_y + N_z \omega_z, \quad (6.36)$$

роботу в одиницю часу або потужність сторонніх сил під час обертання твердого тіла відносно нерухомої осі. Це є скалярний добуток кутової швидкості на момент усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла. Робота зовнішніх сил в процесі повороту на скінченний кут  $\phi_0$  знайдемо інтегруванням:

$$A = \int_0^{\phi_0} \mathbf{N} d\phi. \quad (6.37)$$

Аналогічні вирази справедливі і для  $N_{\parallel}$  як проекції моменту сили на вісь обертання:

$$A = \int_0^{\phi_0} \mathbf{N}_{\parallel} d\phi = \int_0^{\phi_0} N_{\parallel} d\phi.$$

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої фіксованої точки як точки закріплення, через яку проходить миттєва вісь обертання. Жорстко пов'яжемо з тілом декартову систему координат, початок якої помістимо в точку закріплення. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається, складається з кінетичної енергії його частинок:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2},$$

де квадрат швидкості  $v_i^2$  може бути представлений таким чином:

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i].$$

Тоді

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \sum_i \mathbf{M}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{M}. \quad (6.38)$$

У отриманому виразі  $\boldsymbol{\omega}$  – кутова швидкість обертання;  $\mathbf{M}$  – момент імпульсу твердого тіла відносно вибраної точки. Таким чином, кінетична енергія обертального руху відносно точки для твердого тіла виражається скалярним добутком кутової швидкості і сумарного моменту імпульсу тіла:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{M} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{M}_k \omega_k. \quad (6.39)$$

З урахуванням зв'язку векторів  $\boldsymbol{\omega}$  і  $\mathbf{M}$  між собою в найбільш загальному випадку через тензор інерції (див. 6.16, 6.17), вираз для кінетичної енергії набуває вигляду [9, 24, 27]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l,$$

де  $I_{kl}$  – тензор інерції, приведений в (6.15). Для тіла, приведенного до головних осей, тензор інерції має діагональний вигляд (6.19) і вектор момент імпульсу можна написати у вигляді:

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha}^3 I_{\alpha} \omega_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha},$$

де  $\mathbf{e}_{\alpha}$  – одиничний вектор уздовж осі координати. Підставляючи це у вираз (6.39), остаточно отримуємо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} I_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \quad (6.40)$$

### **Приклад** [14]

Нехай однорідний тонкий диск радіуса  $R$  і маси  $m$  обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\omega}$  відносно осі, перпендикулярної до площини обертання диска. Момент інерції диска відносно цієї осі

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Кінетична енергія обертання

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega_z^2.$$

### 6.10 Плоский рух твердого тіла

Під час плоского руху всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині, або проекції усіх точок лежать в паралельних площинах. Тому під час плоского руху досить розглянути рух одного з перерізів тіла, наприклад, такого, в якому лежить центр мас. В цьому випадку вектор  $\boldsymbol{\omega}$  кутової швидкості перпендикулярний площині руху і має постійний напрям. Вісь обертання беруть перпендикулярною площині, що містить центр мас, тобто, перпендикулярною площині руху. В цьому випадку вісь  $z$  системи координат, жорстко пов'язаної з твердим тілом, перпендикулярна до площини руху (в якій лежить центр мас) і кутова швидкість обертання завжди спрямована уздовж цієї осі. Вектор кутової швидкості має компоненти  $\omega = \omega_z$ ,  $\omega_x = \omega_y = 0$ , вісь обертання проходить через центр мас, вісь  $z$  – єдина вісь обертання.

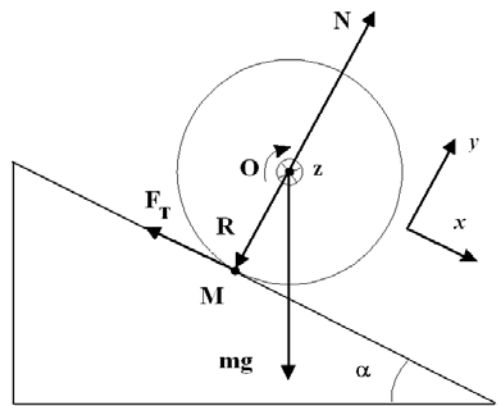
Рівняння руху в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}; \\ I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Перше рівняння – рівняння руху центру мас під дією сумарної зовнішньої сили, прикладеної до цієї точки, друге рівняння – рівняння моментів відносно осі, що проходить через центр мас. Сили, що діють на тіло,

паралельні площині  $(x, y)$ , а моменти сил перпендикулярні до неї. Рівняння моментів записане відносно рухомого центру мас, проте, як було встановлено вище, це рівняння має такий же вигляд, як і рівняння відносно нерухомої точки, і система центру мас є ІСВ. Таким чином, особливістю плоского руху є те, що вісь обертання зберігає свою орієнтацію в просторі, залишаючись весь час перпендикулярною площині, в який рухається центр маси.

Розглянемо як **приклад** [2, 3, 6] скочування циліндра з похилої площини. Вважатимемо, що циліндр скочується без ковзання. Сили, які діють на циліндр, показані на рис. 6.21. Рух без ковзання означає, що у будь-який момент часу точка дотику циліндром похилої площини (точка М) нерухома, тобто її швидкість дорівнює нулю. Через цю точку проходить миттєва вісь обертання. З боку похилої площини на циліндр діють сили нормального тиску  $\mathbf{N}$  і дотична сила тертя, яка є силою тертя спокою або силою тертя зчеплення, що забезпечує зчеплення циліндра з похилою площиною. Модуль сили тертя може набувати значень від 0 до  $kF_T$ , тобто  $F_T \leq kN$ , де  $k$  – коефіцієнт тертя.



**Рис. 6.21. Скочування циліндра по похилій площині**

Розглянемо обертання циліндра відносно осі, що проходить через центр мас. Система рівнянь (6.41) для опису руху циліндра в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тер}}; \\ I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= [\mathbf{R} \mathbf{F}_{\text{тер}}]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

За відсутності ковзання модуль швидкості центру мас  $v = \omega R$ , а прискорення  $a = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$ . У рівнянні моментів в (6.42) момент створюється силою реакції опори  $N$ , роль в цьому випадку грає та її складова, що паралельна похилій площині – сила тертя. Сила тяжіння моменту не створює, оскільки проходить через центр мас.

Спроектуємо отримані рівняння (6.42) на осі  $x, z$  вибраної системи координат:

$$\begin{aligned} ma &= mgsin\alpha - F_{\text{тер}}; \\ I \frac{d\omega}{dt} &= F_{\text{тер}} R, \quad N = mgcos\alpha; \\ a &= \frac{d\omega}{dt} R; \quad I = \frac{1}{2} mR^2. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Розв'язуючи систему рівняння (6.43), знайдемо прискорення, з яким циліндр скочується з похилої площини і величину сили тертя:

$$\begin{aligned} a &= \frac{gsin\alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}; \\ F_{\text{тер}} &= \frac{mgsin\alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}}. \end{aligned}$$

З останнього рівняння виходить, що для кута  $\alpha \rightarrow 0$   $F_{\text{тер}} \rightarrow 0$ , тобто за відсутності ковзання циліндр котиться по горизонтальній площині рівномірно і прямолінійно нескінченно довго. Проте цей результат відноситься до ідеальних моделей взаємодіючих тіл: вони мають бути ідеально твердими і гладкими. Реальні тіла в процесі взаємодії деформуються, на площині існують поглиблення, циліндр прилягає до площини не однією точкою, а деякою скінченною поверхнею, тому виникає сила, що уповільнює рух. Але ця сила набагато менше від сили тертя ковзання, і нею нехтують.

Умова  $F_T \leq kN$  для циліндра зводиться до такої:

$$\frac{1}{3}mgsin\alpha \leq kmgcos\alpha;$$
$$tg\alpha \leq 3k.$$

Аналогічним чином можна розв'язати цю задачу, розглядаючи рівняння обертального руху відносно нерухомої осі, яка співпадає в даний момент часу з миттєвою віссю обертання. Миттєва вісь проходить через точку дотику циліндра з похилою площиною (через точку М). В такому підході відпадає необхідність в рівнянні руху центру мас. Рівняння моментів відносно миттєвої осі має вигляд:

$$I \frac{d\omega}{dt} = [Rmg];$$
$$I = I_0 + mR^2.$$
(6.44)

У проекції на вісь обертання z:

$$I \frac{d\omega}{dt} = Rmgsin(\pi - \alpha) = Rmgsin\alpha.$$

Результат рішення співпадає з отриманим вище.

Розглянута задача може бути вирішена із застосуванням також закону збереження енергії.

Як ще один **приклад** [2, 3] розглянемо кочення циліндра або колеса по площині. Нехай циліндр (колесо) рухається поступально зі швидкістю  $v_0$  і обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Якщо кочення відбувається без ковзання, між  $v_0$  і  $\omega$  виконується співвідношення:

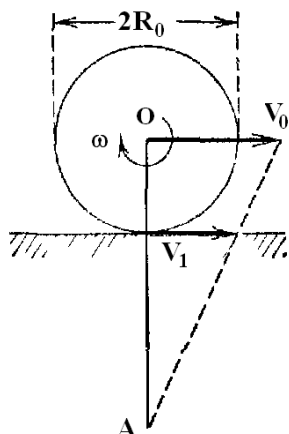
$$v_0 = \omega R$$

де  $R$  – радіус колеса. За відсутності ковзання точка дотику колеса і площини нерухома і через неї проходить миттєва вісь обертання. Миттєва вісь рухається зі швидкістю  $v_0$  уздовж площини і кожного разу вона проходить через різні точки поверхні колеса. В цьому випадку на колесо,



що котиться, в точках дотику діє сила тертя спокою, що забезпечує зчеплення колеса з поверхнею, по якій воно рухається.

Якщо  $v_0 > \omega R$  або  $v_0 < \omega R$ , точка дотику ковзатиме, колесо



**Рис. 6.22. Положення миттєвої осі обертання (точка А) під час руху з ковзанням**

рухатиметься з ковзанням. У першому випадку швидкість точки дотику спрямована вперед, в іншому – назад. У обох випадках миттєва вісь вже не проходить через точку дотику. В першому випадку миттєва вісь проходить через точку, що лежить нижче площини кочення (точка А на рис. 6.22), швидкість  $v_1$  точки дотику спрямована

вперед, поступальний рух перевищує обертальний, колесо ковзає зі швидкістю  $v_1$ . У другому випадку миттєва вісь проходить через точку, що лежить вище від площини кочення, точка дотику рухається назад, обертання перевищує поступальний рух.

Покажемо, що під час кочення з ковзанням поступальна і обертальна швидкості пов'язані співвідношенням:

$$mv_0R + I\omega = \text{const}.$$

Рівняння руху центру мас і моментів мають вигляд:

$$m \frac{dv}{dt} = \pm F; \quad I \frac{d\omega}{dt} = \mp N = \mp RF,$$

де для  $+F$  сила тертя спрямована вперед, поступальний рух прискорюється, обертання сповільнюється; для  $-F$  сила тертя спрямована назад, поступальний рух сповільнюється, обертання прискорюється.

Виключимо з рівнянь  $F$ , розділивши одне рівняння на інше:

$$mRdv = -Id\omega; \quad mRdv + Id\omega = 0;$$

$$mR \frac{dv}{dt} + I \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad \frac{d}{dt}(mRv + I\omega) = 0; \quad (6.45)$$

$$mRv + I\omega = \text{const},$$

що і доводить співвідношення. Проте, як вказано вище, реальні тіла під час руху мають деформуватися і з часом ця величина тільки зменшується.

З (6.45) виходить, що

$$mR \frac{dv}{dt} = -I \frac{d\omega}{dt}; \quad mR \frac{dv}{d\omega} = -I; \quad (6.46)$$

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{I}{mR}; \quad \frac{d\omega}{dv} = -\frac{mR}{I}.$$

Останні два співвідношення в (6.46) справедливі за проміжок часу ковзання.

Розглянемо таку **задачу**. Циліндру маси  $m$ , радіуса  $R$  надали поступальний рух без обертання зі швидкістю  $v_0$ , і він почав рухатися з ковзанням. Знайти його швидкість після закінчення ковзання, а також час ковзання. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $\mu$ .

Під час такого руху в момент його початку  $v_0 > \omega R$ , сила тертя спрямована у бік, протилежний до напрямку поступального руху, поступальний рух гальмується, швидкість обертального руху зростає, поки не закінчиться процес ковзання. Рівняння руху циліндра можна записати таким чином:

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{тер}}; \quad I \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тер}} R.$$

Виключаючи звідси силу тертя, отримуємо:

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{I}{mR}; \quad \int_{v_0}^v dv = -\frac{I}{mR} \int_0^\omega d\omega; \quad v - v_0 = -\frac{I}{mR} \omega.$$

У момент закінчення ковзання  $v = \omega R$ ,  $\omega = v/R$ . Підставляючи це в останню формулу, знаходимо лінійну швидкість після закінчення

ковзання. Для знаходження часу ковзання складемо рівняння поступального руху:

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{тер}} = -\mu mg; \quad dv = -\mu g dt; \quad \int_{v_0}^v dv = -\mu g \int_0^t dt;$$

$$v - v_0 = -\mu mt; \quad t = -\frac{v - v_0}{\mu m}.$$

З рішення видно, що  $v < v_0$ ,  $t > 0$ .

Слід розрізняти три роди сил тертя, що виникають під час кочення колеса (циліндра) по площині: власне тертя кочення, тертя ковзання і тертя зчеплення [1]. Якщо однорідний циліндр котиться по похилій площині з ковзанням, то присутні всі три види сил тертя. Якщо ковзання немає, то діють сили тертя зчеплення і кочення. У багатьох випадках сила тертя кочення мала, і тоді залишається тільки сила тертя зчеплення. Якщо діє тільки сила тертя зчеплення, точка дотику циліндра не зміщується відносно площини, як під час терті спокою, і немає втрат механічної енергії.

Розглянемо тертя ковзання. Поставимо розкручений навколо своєї осі циліндр з лінійною швидкістю, рівною нулю, на горизонтальну поверхню. Циліндр почне котитися по площині з ковзанням під дією зовнішньої сили з боку площини. Лінійна швидкість циліндра зростатиме від нуля, сила тертя ковзання прискорить поступальний рух, але уповільнить обертальний. Швидкість ковзання зменшуватиметься за модулем:

$$v_{\text{ков}} = \omega R - v,$$

оскільки  $\omega R > v$ , де  $v$  – поступальна швидкість циліндра,  $\omega$  – кутова. Сила тертя ковзання зникне для  $v_{\text{ков}} = 0$ , і далі буде рівномірний рух, в процесі якого  $v = \omega R$ . Силу тертя ковзання можна припустити рівною  $F = \mu N$  згідно закону Амонтона-Кулона. Вона діє в проміжку часу від 0 до  $t_0$ , доки

має місце ковзання, тобто, поки не настане момент часу, для якого  $v = \omega R$ . В такому разі частина запасеної кінетичної енергії циліндра переходить в тепло. Якщо швидкість ковзання  $v_{\text{ков}}$  спрямована назад, сила тертя ковзання спрямована вперед; якщо  $v_{\text{ков}}$  спрямована вперед ( $\omega R < v$ ), сила тертя ковзання спрямована назад.

Важливу роль під час руху без ковзання автомобіля, локомотиву (трамвая) грає сила тертя зчеплення. Її виникнення обумовлене наявністю зовнішніх сил і їх моментів, прикладеним до коліс. Величина цієї сили пропорційна  $N$  – силі реакції дороги на колеса. Ця сила, як і у випадку сили тертя спокою, не перевершує деякої величини  $F_0$ . До коліс прикладений обертальний момент з боку двигуна, який створює силу, що рухає корпус. У першому наближенні сила, що рухає, дорівнює силі тертя зчеплення, яка дає можливість зрушити автомобіль (локомотив) без ковзання з місця. Таким чином, сила тертя зчеплення обумовлена дією на об'єкт, що рухається, тільки зовнішніх сил від двигуна. Сила тертя зчеплення не здійснює роботу.

Під час кочення циліндра без ковзання виникає сила тертя кочення – сила, пов'язана із втратою енергії, оскільки циліндр, що котиться по рівній горизонтальній площині, врешті-решт зупиняється. Під час кочення площина і циліндр деформуються під дією сили тяжіння з боку циліндра. За наявності тільки пружних деформацій вони не вплинуть на швидкість кочення, і сили тертя кочення в цьому випадку не виникають. Проте, циліндр все ж зупиняється, отже, необхідно визнати наявність сил непружних деформацій. Сили, що діють на циліндр з боку площини, обов'язково мають горизонтальну складову, спрямовану назад. Момент цих сил відносно осі циліндра не дорівнює нулю, і він протилежний до напрямку обертання. Розрахунок сили тертя кочення досить складений,

оскільки доки немає теорії і не досить вивчені закони дії сил під час непружних деформацій. Сила тертя кочення значно менше сили тертя ковзання, і для рішення задач, а також в практичному використанні силами тертя кочення можна нехтувати. Ці сили не здійснюють роботу, і під час кочення без ковзання можна застосовувати закон збереження енергії.

### 6.11 Кінетична енергія під час плоского руху

Кінетична енергія твердого тіла, що здійснює плоский рух, є сумою кінетичних енергій складових його елементів:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i)^2, \quad (6.47)$$

де  $\mathbf{v}_0$  – поступальна швидкість центру мас тіла,  $\mathbf{u}_i = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]$  – поступальна лінійна швидкість і-того елемента відносно системи координат, пов’язаної з центром мас, що рухається поступально разом з ним,  $\mathbf{r}_i$  – радіус-вектор елементарної маси  $m_i$  від осі обертання. У (6.47) зведемо в квадрат і отримаємо:

$$T = \frac{v_0^2}{2} \sum_i m_i + \mathbf{v}_0 \sum_i m_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{I_O \omega^2}{2}, \quad (6.48)$$

оскільки доданок  $\sum_i m_i \mathbf{u}_i$  в системі центру мас перетворюється на нуль, а модуль векторного добутку дорівнює  $u_i = \omega r_i$ . Звідси  $u_i^2 = \omega^2 r_i^2$ , а сума добутків  $\sum_i m_i r_i^2 = I_O$  дорівнює моменту інерції тіла відносно осі, що проходить через точку О початку системи координат, розташованого в центрі мас, що і призводить до (6.48). Результат отриманий в повній відповідності з теоремою Кеніга: кінетична енергія тіла під час плоского руху дорівнює сумі кінетичних енергій поступального руху зі швидкістю,

рівною швидкості центру мас, і обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас тіла.

## 6.12 Рух гіроскопів

### 6.12.1 Вільні осі обертання

Вісь обертання, напрямок якої в просторі залишається незмінним без дії на неї яких-небудь зовнішніх сил, називають вільною віссю обертання. Можна показати, що це відбувається тоді, коли вісь обертання співпадає з центральною головною віссю інерції тіла [5, 6, 27].

Тут виникає питання про стійкість такого обертання по відношенню до малих збурень. Дослід показує, що обертання навколо головних центральних осей є стійким. В цьому випадку момент імпульсу співпадає з напрямом кутової швидкості. Крім того, стійкіше обертання навколо осей з найбільшим і найменшим моментом інерції (осі A і C на рис. 6.23), менш стійке – з проміжним (вісь B). У цьому можна просто переконатися, підкидаючи вгору порожню сірникову коробку (паралелепіпед на рис. 6.23) і розкручуючи його навколо однієї з трьох взаємно перпендикулярних головних центральних осей. У всіх цих випадках  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ , де  $I$  – момент інерції відносно відповідної осі. Якщо вісь обертання є центральною головною віссю інерції – віссю симетрії, і ця вісь під час обертання закріплена нерухомо (наприклад, підшипниками), то з причини збігу напрямів моменту імпульсу з кутовою швидкістю розкручене і надане самому собі тіло (наприклад, стержень) не чинить на підшипники ніякого впливу. Вісь обертання утримується в незмінному

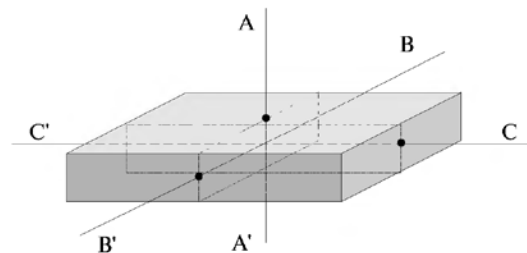
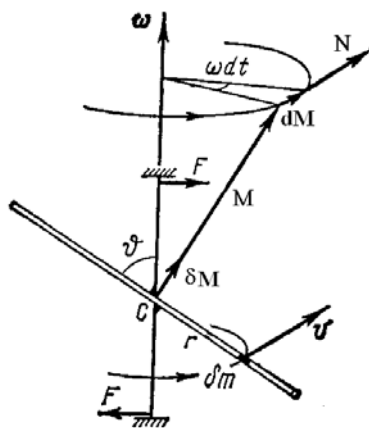


Рис. 6.23. Головні центральні осі обертання паралелепіпеда

положенні, і таке обертання може тривати як завгодно довго. Таким чином реалізується вільна вісь обертання.

Розглянемо такий **приклад** [5]. Нехай середина  $C$  однорідного стержня жорстко закріплена на осі обертання так, що кут між стержнем і віссю складає  $\theta$  (рис. 6.24). Під час обертання цього стержня відносно осі з кутовою швидкістю  $\omega$  вісь зазнає певного динамічного навантаження. Виникають вібрації, трясіння, інші деформації осі, вісь може згинатися, з боку осі на стержень діє пружна сила (у НСВ ця сила компенсується відцентровою), на вісь діє сила з боку підшипників, якщо вона закріплена (так звана гіроскопічна сила). У разі, якщо вісь обертання не закріплена, можна знайти момент зовнішніх сил, які необхідно прикласти до осі



**Рис. 6.24.** До розрахунку моменту сил для утримання осі обертання в незмінному напрямі

обертання, щоб під час обертання стержня з кутовою швидкістю  $\omega$  її напрям не змінювався.

Як відомо,  $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}$ , і, отже, треба знайти

момент імпульсу, а потім обчислити його похідну за часом. Момент імпульсу найпростіше визначити відносно точки  $C$ .

Виділимо елемент маси  $\delta m$  стержня на відстані  $r$  від точки  $C$ . Момент імпульсу виділеного фрагмента відносно точки  $C$  має вираз як

$\delta \mathbf{M} = [\mathbf{r} \delta m \mathbf{v}] = \delta m [\mathbf{r} \mathbf{v}]$ . Вектор  $\delta \mathbf{M}$  перпендикулярний стержню для будь-якого виділеного елементарного фрагмента маси  $\delta m$ . Сумарний момент імпульсу  $\mathbf{M}$  співпадає за напрямом з  $\delta \mathbf{M}$  і його завжди можна підрахувати. В цьому випадку важливішим є те, що напрям вектора  $\mathbf{M}$  не співпадає з напрямом вектора кутової швидкості  $\omega$ . Як видно з рис. 6.24, вектор  $\mathbf{M}$  рухатиметься по поверхні конуса з кутовою швидкістю  $\omega$  відносно закріпленої осі. За проміжок часу  $dt$  модуль приросту вектора

$\mathbf{M}$  ( $|\mathbf{dM}| = \text{const}$ ), вектор  $\mathbf{dM}$ , більш точно, модуль приросту цього вектора дорівнюватиме:

$$|\mathbf{dM}| = M \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\varphi, \quad d\varphi = \omega dt;$$

$$|\mathbf{dM}| = M \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \omega dt.$$

Оскільки  $|\mathbf{dM}| = \text{const}$ , то відповідно до формули Пуансо, для вектора, який змінює тільки напрям руху, отримуємо, що

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}]. \quad (6.49)$$

З іншого боку  $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}$ , моменту прикладених зовнішніх сил. Таким чином, маємо:

$$\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}]. \quad (6.50)$$

Отже, для утримання осі обертання в незмінному напрямку, до неї необхідно прикласти момент сил, рівний векторному добутку кутової швидкості обертання і моменту імпульсу тіла відносно цієї осі. Тільки у тому випадку, якщо вектори  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  за напрямом співпадають, тобто кут  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , момент сил  $\mathbf{N} = 0$ , і напрям осі обертання залишатиметься незмінним без зовнішньої дії. Як сказано вище, це виконується тоді, коли осями обертання є головні центральні осі і  $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ . Вірне і зворотне: під дією моменту зовнішніх сил вісь обертання тіла може змінювати свій напрям, тобто переміщатиметься в просторі.

### 6.12.2 Рух вільного гіроскопа

Вище була розглянута динаміка обертального руху твердого тіла



навколо нерухомої осі і динаміка плоского руху твердого тіла. Розглянемо рух твердого тіла з однією нерухомою точкою – рух гіроскопів або дзиг відносно закріпленої на площині точки.

Під дзигою розумітимемо будь-яке тіло, що обертається, головні осі інерції якого спрямовані по осях симетрії системи координат, жорстко пов'язаної з цим тілом. Тензор інерції такого тіла має тільки діагональні компоненти. Вільна дзига – тіло, що вільно рухається в просторі або ж тіло, що закріплене в центрі мас і вільно провертається навколо цієї точки у будь-якому напрямі. Якщо у дзиги  $I_x \neq I_y \neq I_z$ , таку дзигу називають асиметричною, для  $I_x = I_y \neq I_z$  – симетрична дзига, якщо  $I_x = I_y = I_z$  – кульова дзига. Приклади симетричних дзиг: тонкий однорідний диск під час обертання відносно осі, яка проходить через центр мас і яка перпендикулярна до площини диска; тонкий однорідний стержень під час обертання відносно осі, яка проходить через центр мас і яка перпендикулярна до стержня. Несиметрична дзига – брусок у вигляді паралелепіпеда (сірникової коробки) з різними розмірами уздовж осей координат, початок яких знаходиться в центрі мас бруска [9, 27].

Під гіроскопом зазвичай розуміють масивне аксіально-симетричне тіло, що обертається з великою кутовою швидкістю навколо своєї осі симетрії.

Розглянемо спочатку вільний рух гіроскопа з нерухомим центром мас. Щоб вісь фігури гіроскопа могла вільно обертатися в просторі, його поміщають в спеціальний пристрій – так званий **карданний підвіс** (рис. 6.25). Положення тіла в карданному підвісі таке, що осі  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  перетинаються в центрі мас. У такому пристрої всі кільця можуть вільно обертатися навколо зазначених осей. Вісь  $AA'$  гіроскопа (в цьому випадку це вісь його симетрії) може приймати будь-яке просторове положення. Гіроскоп має три ступені свободи і може здійснювати будь-які повороти

навколо центру підвісу. Під час будь-яких можливих рухів його центр мас нерухомий. Такий гіроскоп називають урівноваженим. Таким чином, для гіроскопа в карданному підвісі моменти всіх зовнішніх сил (у тому числі і момент сили тяжіння) відносно центру мас дорівнюють нулю:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0, \quad \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{M} = \text{const.}$$

Для гіроскопа, розкрученого навколо осі симетрії, напрям векторів  $\mathbf{M}$  і  $\boldsymbol{\omega}$  співпадають,  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  і напрям його осі симетрії залишається незмінним, в чому можна переконатися безпосередньо: в процесі довільних поворотів підставки, в якій розташований карданний підвіс, вісь гіроскопа зберігає незмінний напрям в просторі. З тієї ж причини невелика дзига,

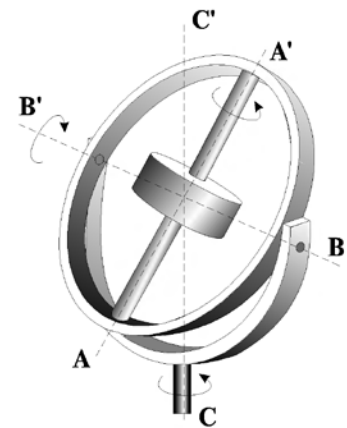


Рис. 6.25. Карданний підвіс

запущена на площині і підкинута вгору, зберігає орієнтацію своєї осі під час польоту, і, падаючи вістрям на площину, продовжує стійке обертання (рис. 6.26). Оскільки

$$\Delta\mathbf{M} = \int_0^t \mathbf{N} dt$$

то для досить малого  $\Delta t$  також є малим і  $\Delta\mathbf{M}$ , тобто для короткочасних дій навіть досить великих сил рух гіроскопа змінюється незначно [6].

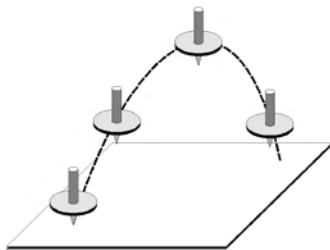


Рис. 6.26. Рух дзиги

Якщо вільний гіроскоп розкручений так, що вектор миттєвої кутової швидкості і вісь симетрії гіроскопа не співпадають, то спостерігається рух осі гіроскопа, яке називають як «вільна регулярна прецесія», або, стосовно гіроскопа, нутація. Якщо швидкості обертання досить великі, то нутація, що виникає, сприймається як дрібне тремтіння

осі симетрії гіроскопа. Аналіз нутації може бути проведений з використанням рівнянь Ейлера [1, 9].

### 6.12.3 Прецесія гіроскопа під дією зовнішніх сил

Нехай ми маємо гіроскоп, вісь якого закріплена в одній точці. Розглянемо випадок, коли до осі гіроскопа прикладена сила, лінія дії якої не проходить через точку закріплення. Якщо до осі шарнірно закріпленого в точці  $O$  гіроскопа прикріпити пружину і тягнути вгору з силою  $\mathbf{F}$ , то вісь гіроскопа переміщатиметься не у напрямі дії сили, а перпендикулярно до неї (рис. 6.27, а). Такий рух називають прецесією гіроскопа під дією зовнішньої сили або вимушеною прецесією. Кутова швидкість прецесії залежить не лише від сили  $\mathbf{F}$ , але і від її плеча  $l$ : якщо збільшувати і  $\mathbf{F}$  і  $l$ ,

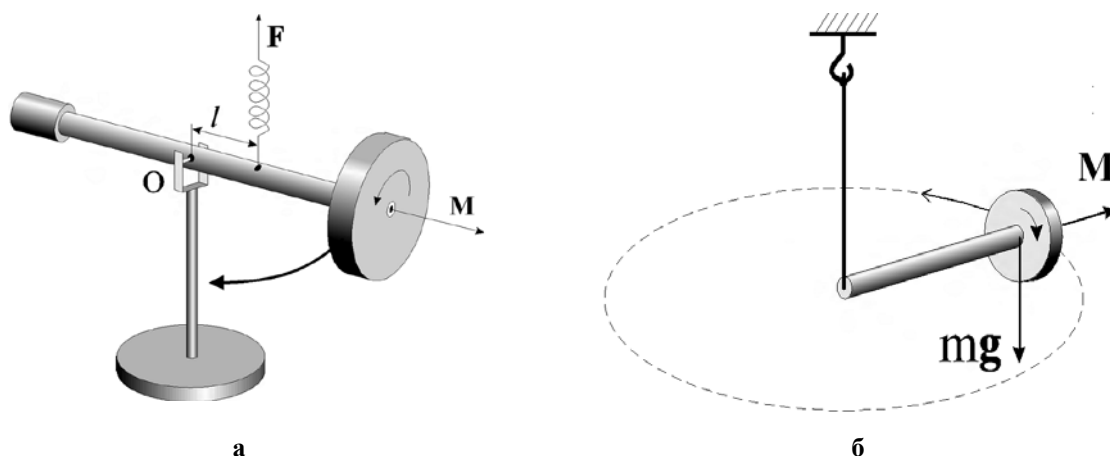


Рис. 6.27. Прецесія гіроскопа під дією зовнішніх сил

то швидкість прецесії зростає. Силою  $\mathbf{F}$ , що викликає прецесію, може бути сила тяжіння, якщо точка закріплення гіроскопа не співпадає з центром мас. Так, якщо стрижень із диском, який досить швидко обертається, підвісити на нитці (рис. 6.27, б), то він не опускатиметься вниз, як можна було б сподіватись, а здійснює прецесійний рух навколо нитки. Можна навести і інші приклади прецесії. Наприклад, рух осі дитячої іграшки дзиги із загостреним кінцем. Дзига, розкручена навколо своєї осі і поставлена під

деяким кутом на горизонтальну поверхню, починає прецесію навколо вертикальної осі під дією сили тяжіння.

Точне рішення задачі про рух гіроскопа дуже складне. Проте можна для її вирішення скористатися елементарною теорією гіроскопа [1, 6, 27]. У цій теорії припускають, що миттєва кутова швидкість обертання гіроскопа і його момент імпульсу спрямовані уздовж осі симетрії гіроскопа. Іншими словами, кутова швидкість обертання гіроскопа навколо осі значно більша від кутової швидкості прецесії. В такому наближенні момент імпульсу  $\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\omega}$ , тобто момент імпульсу спрямований уздовж осі симетрії і уздовж осі обертання. Вважатимемо, що гіроскоп обертається з досить великою швидкістю, і нутацією гіроскопа під дією зовнішніх сил можна нехтувати.

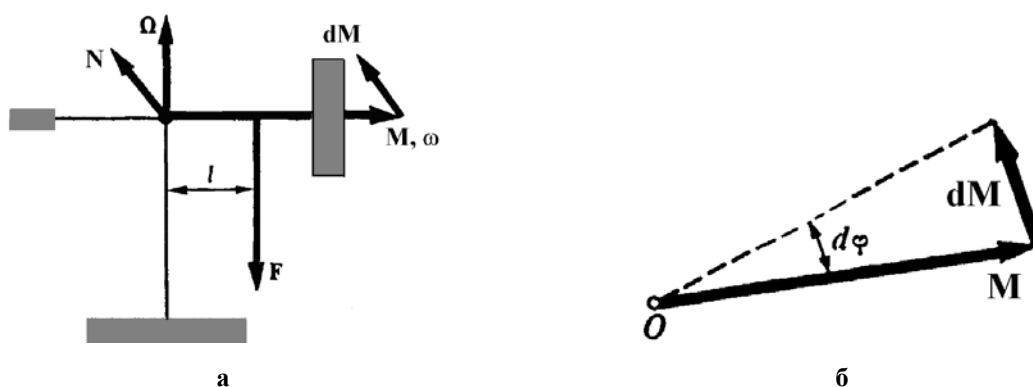


Рис. 6.28. До прецесії навантаженого гіроскопа

Прикладемо до гіроскопа, що закріплений в одній точці і вільно обертається, зовнішню силу. Вісь гіроскопа може рухатися у будь-якому напрямі, тому гіроскоп вільний. До аналізу руху гіроскопа застосуємо рівняння моментів  $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}$ , оскільки зміна моменту імпульсу  $\mathbf{M}$  описує безпосередньо рух його осі. Якщо момент сил  $\mathbf{N}$  – величина відома, то можна визначити напрям руху осі гіроскопа  $d\mathbf{M} = \mathbf{N}dt$ . Нехай вісь гіроскопа розташована горизонтально. Сила  $\mathbf{F}$  створює момент  $\mathbf{N} = l\mathbf{F}$ , перпендикулярний площині, що містить  $\mathbf{F}$  і  $l$  (рис. 6.28, а). Наявність обертання змінює напрям дії сили. Оскільки  $d\mathbf{M} = \mathbf{N}dt$ , кінець осі починає

рухатися в горизонтальній площині. Якщо в цьому випадку  $\mathbf{F}$  зберігає постійною напрям і величину (наприклад, сила створюється вантажем, підвішеним до осі гіроскопа на деякій відстані від точки закріплення), то такий рух відбувається з постійною кутовою швидкістю  $\Omega$ . Вісь гіроскопа обертається навколо вертикальної осі, що проходить через точку опори (підвісу) гіроскопа з кутовою швидкістю прецесії  $\Omega$ . В результаті прецесії повна кутова швидкість обертання  $\Omega + \omega$  не співпадає з віссю гіроскопа. Але, оскільки  $\omega \gg \Omega$ , то незбіг є незначним і, як і раніше, можна вважати, що кутова швидкість швидкого обертання весь час співпадає з віссю гіроскопа і моментом імпульсу. Величину  $\Omega$  можна знайти, розглянувши хід прецесії в горизонтальній площині (рис. 6.28, б). Отже маємо

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{N}dt; \quad d\mathbf{M} = M d\varphi; \quad \rightarrow M d\varphi = \mathbf{N}dt; \\ \mathbf{N} &= M \frac{d\varphi}{dt} = M\Omega; \quad \mathbf{N} = [\Omega \mathbf{M}]. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Звідси можна знайти кутову швидкість прецесії:

$$\Omega = \frac{N}{M} = \frac{N}{I\omega}.$$

Прецесія закінчується в момент припинення дії моменту зовнішніх сил, тобто прецесія не має інерції. Рівняння

$$\mathbf{N} = [\Omega \mathbf{M}] \quad (6.52)$$

називають рівнянням прецесії навантаженого гіроскопа.

Розглянемо також прецесію навантаженого гіроскопа на прикладі дзиги, що обертається відносно точки закріплення [13, 27]. Нехай ми маємо масивний симетричний гіроскоп, в якого нерухома точка  $S$  (точка опори) не співпадає з центром мас в точці  $O$ . На гіроскоп діє зовнішня сила (сила тяжіння  $m\mathbf{g}$ ). Як і в попередньому випадку припустимо, що миттєва кутова швидкість обертання гіроскопа і його момент імпульсу спрямовані уздовж осі симетрії. Кутова швидкість обертання  $\omega \gg \Omega$  кутової швидкості

прецесії. В цьому випадку також  $\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\omega}_z$  (рис. 6.29).

Модуль моменту сили тяжіння відносно точки закріплення дорівнює

$$N = mgl \sin \theta = \|\mathbf{l} \times \mathbf{mg}\|,$$

де  $\mathbf{l}$  – радіус-вектор. Вектор  $\mathbf{N}$  спрямований по нормалі до площини, в якій лежить вісь гіроскопа і вертикаль. Сила реакції опори  $\mathbf{N}_\perp$  проходить через точку  $S$  і її момент відносно цієї точки дорівнює нулю. Зміна моменту імпульсу

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N} dt.$$

Тут  $\mathbf{l}$  – вектор  $\mathbf{M}$ , і вісь гіроскопа прецесіє навколо вертикалі з кутовою швидкістю  $\boldsymbol{\Omega}$ . З рис. 6.29 видно, що  $d\mathbf{M} = M \sin \theta \boldsymbol{\Omega} dt$ ;  $d\mathbf{M} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{M} dt]$ , звідки, використовуючи формулу Пуансо, отримуємо, як і попередньому випадку:

$$\mathbf{N} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{M}].$$

Це дає можливість визначити напрям прецесії для заданого напрямку обертання гіроскопа навколо власної осі.

Сила, що викликає прецесію, може мати будь-яку природу [6]. Важливо тільки, щоб вектор  $\mathbf{N}$  обертався разом з віссю гіроскопа. Для випадку сили тяжіння це досягається автоматично. З отриманих співвідношень знайдемо кутову швидкість прецесії:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega} = \frac{N}{I_z \omega}. \quad (6.53)$$

Звідси виходить, що кутова швидкість прецесії  $\Omega$  не залежить від кута  $\theta$  нахилу осі гіроскопа і обернено пропорційна до кутової швидкості  $\omega$  обертання гіроскопа навколо власної осі, що добре узгоджується з експериментальними даними.

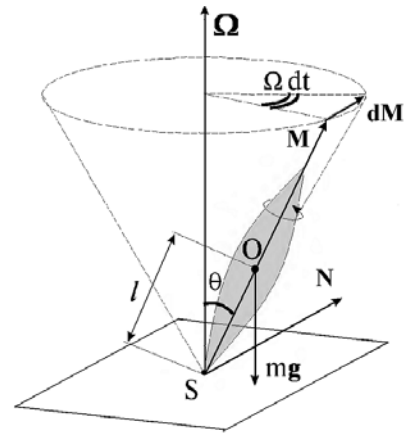
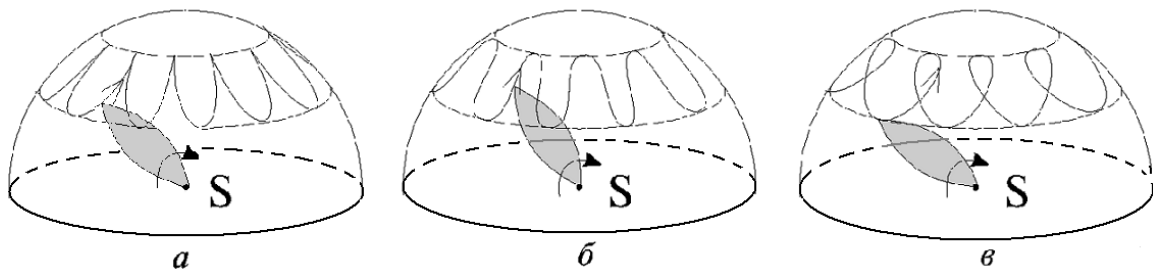


Рис. 6.29. Прецесія дзиги під дією сили тяжіння

Насправді, прецесійні рухи складніші, ніж описано вище з використанням спрощеної теорії руху гіроскопів [1, 6, 27]. Наприклад, якщо гіроскопу надати поштовх, що змінює кут  $\theta$  його нахилу, прецесія перестає бути рівномірною (регулярною), а супроводжуватиметься дрібними коливаннями вершини гіроскопа – нутаціями. Для їх опису необхідно врахувати незбіг вектора  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  і осі симетрії. Оскільки  $d\mathbf{M} = \mathbf{N}dt$ , то кінець вектора  $\mathbf{M}$  перпендикулярний вертикалі і осі гіроскопа, тобто проекція  $\mathbf{M}$  на вертикаль  $M_v$  і вісь гіроскопа залишаються незмінними. Також зберігається повна енергія гіроскопа. З цими міркуваннями, а також використовуючи рівняння Ейлера, можна описати рух гіроскопа аналітично. Результат такого опису: вектор  $\mathbf{M}$  описує в процесі свого руху нерухомий в просторі конус прецесії, а вісь симетрії гіроскопа рухається навколо вектора  $\mathbf{M}$  по поверхні конуса нутацій. Вершина конуса нутацій, як і вершина конуса прецесії, знаходиться в точці закріплення гіроскопа, вісь конуса нутацій співпадає за напрямком з  $\mathbf{M}$  і рухається разом з ним. Траєкторії абсолютного руху вершини гіроскопа – це лінії на рис. 6.30. Вид їх залежить від початкових умов. У випадку 6.30 (а), гіроскоп був розкручений навколо осі симетрії, встановлений на підставці під деяким кутом до вертикалі і обережно відпущений. У випадку на рис. 6.30 (б), йому, окрім того, був наданий деякий поштовх вперед, а у випадку на рис. 6.30 (в) – поштовх назад по відношенню до напрямку прецесії. Криві на рис. 6.30 аналогічні циклоїдам точки на ободі колеса, що котиться без ковзання по площині, або з ковзанням в ту чи іншу сторону. Чим швидше обертається гіроскоп, тим більше кутова швидкість нутацій і тим менше їх амплітуда. Під час досить швидкого обертання нутації стають практично непомітними.

Можна поставити питання, чому розкручений, встановлений під кутом до вертикалі і відпущений гіроскоп не падає під дією сили тяжіння, а

рухається вбік? Відповідь на нього може дати тільки точна теорія гіроскопів. Дійсно, гіроскоп починає падати, а прецесійний рух виникає як наслідок закону збереження моменту імпульсу. Відхилення осі гіроскопа вниз зменшує проекцію моменту імпульсу на вертикальний напрям. Воно має компенсуватися моментом імпульсу, пов'язаним з прецесійним рухом. Кінетична енергія прецесії є наслідком зміни потенціальної енергії гіроскопа.



**Рис. 6.30. Нутації гіроскопа за різних початкових умов**

Можна приблизно підрахувати число обертів в одиницю часу, яку здійснює вісь симетрії гіроскопа, рухаючись по поверхні конуса нутацій:

$$n \approx \frac{I_z \omega}{2\pi I_s},$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання осі гіроскопа;  $I_z$ ,  $I_s$  – моменти інерції гіроскопа відносно осі симетрії і відносно осі, що проходить через точку опори перпендикулярно осі.

### **Задачі для самостійного розв'язування**

6.1. Знайти момент інерції кільцевого циліндра масою  $m$  з радіусами  $R_1$ ,  $R_2$  відносно осі, паралельної його висоті. Знайти головні центральні моменти інерції однорідного прямокутного бруска масою  $m$  з розмірами  $a \times b \times c$ .

6.2. Густина тонкого диска радіуса  $R$  розподілена за законом



$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - a \frac{r}{R}\right)$ , де  $0 < a < 1$  – параметр,  $\rho_0$  – додатна стала,  $r$  – відстань від центру диска. З яким значенням параметра  $a$  момент інерції диска відносно осі, перпендикулярної до площини диска, і яка проходить скрізь його центр, дорівнює:  $\frac{mR^2}{3}$ ;  $\frac{mR^2}{2}$ ?

6.3. Тонка прямокутна пластинка із сторонами  $a, 2a$  обертається навколо осі, співпадаючої з однією з її діагоналей, з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти головні центральні моменти інерції, момент імпульсу пластини і його напрям, і момент сил, що діє на вісь обертання.

6.4. На льоду лежить стержень довжиною  $L$ , масою  $M$ , з яким пружно зіштовхується кулька масою  $m$ . Швидкість кульки  $V$  спрямована по нормалі до стержня. Точка удару близька к кінцю стержня. Знайти швидкість кульки після зіткнення.  $\left(v' = \frac{M - 4m}{M + 4m} V\right)$ .

6.5. Кульку радіусу  $R$  пускають вперед з лінійною швидкістю  $v_0$  і одночасно закручують у зворотний бік з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Знайти швидкість центру мас кульки, з якою він повертатиметься назад. При якій мінімальній швидкості  $v_{0\min}$  це можливо? Знайти час ковзання, якщо коефіцієнт тертя дорівнює  $\mu$ . Знайти повний час руху, шлях, пройдений за час ковзання і повний шлях, пройдений кулькою.

6.6. На шорсткуватому столі стоїть паличка, яка починає падати з вертикального положення в полі тяжіння. Коли кут нахилу палички досягає  $\varphi$  ( $\varphi = 45^\circ$ ), її ніжній кінець починає ковзати. Знайти коефіцієнт

тертя.  $\left(\mu = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi}{\frac{1}{3} - 2 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi}\right)$ .

## РОЗДІЛ VII

### КОЛИВАЛЬНІ РУХИ

#### 7.1 Гармонічний осцилятор

Важливим видом механічного руху є рух, в якому об'єкт здійснює фінітні переміщення поблизу деякого положення рівноваги. У широкому значенні слова під рухом розуміють не лише його просту форму – зміну положення об'єкту в просторі, але і будь-яку зміну в часі властивостей матерії, розподіленої певним чином в просторі. Коливаннями називатимемо процеси, що повторюються (або що приблизно повторюються) в часі. Такі процеси характеризуються наявністю періоду – часу, в перебігу якого величини набувають певного значення.

Періодичні процеси трапляються досить часто. У періодичних процесах зміна якої-небудь величини повторюється в тому ж вигляді через певний час – період  $T$ . Математично це означає, що якщо  $f(t)$  – періодична функція, то для будь-якого  $t$

$$f(t + T) = f(t).$$

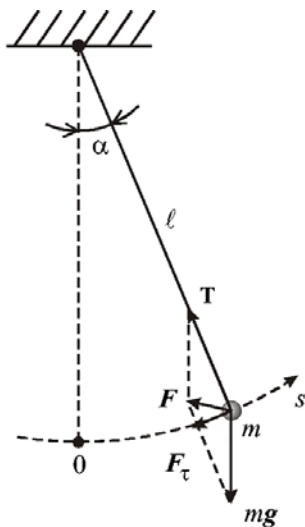
Графік періодичної функції в точності повторюється через період  $T$ . До періодичних процесів відносять і коливання. Періодичні коливання – окремий випадок неперіодичних коливань. Будь-яка коливальна система може бути охарактеризована функцією  $f(x, y, z, t)$ , відхилення якої від рівноважного значення залежить від багатьох чинників.

Коливання можуть бути результатом короткочасної зовнішньої дії. Тоді їх називають вільними або власними. Такі коливання тривають впродовж деякого характерного для них часу – часу загасання. Для підтримки незгасаючих коливань до коливальної системи необхідно

підводити енергію ззовні. Такі коливання називають вимушеними [25].

Розглянемо незгасаючі коливання систем з одним ступенем свободи. Стан такої системи може бути описаний одним єдиним параметром  $f(t)$ . Прикладами таких систем є коливання маятників.

Підвісимо на невагомій нерозтяжній нитці невеликий важок. Відхилимо його від положення рівноваги і відпустимо. Важок почне здійснювати власні коливання під дією рівнодійної сил натягу нитки  $\mathbf{T}$  і сили тяжіння  $m\mathbf{g}$ . Власними ці коливання називають тому, що під час коливання важок знаходиться тільки під дією сил, що визначають фізичне облаштування цього маятника. Якщо можна вважати, що маса маятника зосереджена в одній точці – центрі мас, тобто центр мас – це математична точка, а нитка невагома і нерозтяжна, то такий маятник називають математичним маятником. Математичний маятник – це абстракція, модель процесу.



**Рис. 7.1. Коливання математичного маятника**

Оскільки математичний маятник – система з одним ступенем свободи, описати цю систему можна одним параметром. Таким параметром є кутове  $\alpha(t)$  або лінійне  $s(t)$  відхилення від положення рівноваги. Рух маятника описується другим законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Нехтуватимемо сили опору. На математичний маятник маси  $m$  діятиме під час таких коливань результуюча сила

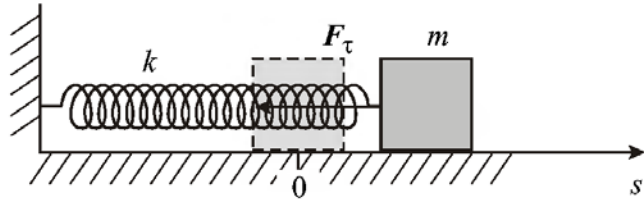
$$\mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}. \quad (7.1)$$

Зміщення від положення рівноваги  $s(t)$  визначається тангенціальним прискоренням. Рівняння руху має вигляд (рис. 7.1):

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) = -mg \sin \alpha = -mg \sin \frac{s}{l}. \quad (7.2)$$

Тут  $F_\tau(s)$  – проекція результуючої сили  $\mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$  на напрям швидкості. Знак «мінус» означає, що напрям  $F_\tau(s)$  протилежно додатному напрямку відхилення  $s(t)$  або  $\alpha(t)$ . Параметр  $l$  – довжина нитки.

Сила, що повертає маятник,  $F_\tau(s)$  є нелінійною функцією зміщення, тому в загальному випадку точне рішення рівняння



**Рис. 7.2. Коливання пружинного маятника**  
(7.2) може бути отримане лише чисельно. Це приклад нелінійного коливання. Далі вважатимемо, що зміщення з положення рівноваги є малим в порівнянні з довжиною нитки. Якщо такі припущення виконуються, то вважають, що  $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{s}{l}$ . З урахуванням цього рівняння

(7.2) набирає вигляду:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) = -mg \frac{s}{l}; \quad (7.3)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \frac{s}{l}.$$

Якщо використати позначення  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ , то отримане рівняння набирає вигляду рівняння незгасаючих гармонічних коливань або гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 s. \quad (7.4)$$

Розглянемо пружинний маятник (рис. 7.2). Для такого маятника параметр  $f(t)$  може характеризувати лінійне зміщення маси  $m$  з положення рівноваги. Нехтуючи силами опору (силами тертя) отримаємо рівняння

руху виду:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s), \quad (7.5)$$

де  $F_\tau(s)$  – горизонтальна сила, що є функцією зміщення. Вважаючи зміщення малим, поворотна сила може бути представлена, як пропорційна самому зміщенню:

$$F_\tau(s) = -ks, \quad (7.6)$$

що справедливо дії закону Гука для малих деформацій. Тоді (7.5) набирає вигляду:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{m}s.$$

Ввівши позначення  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , знову приходимо до рівняння гармонічного осцилятора (7.4). Запишемо рівняння гармонічних коливань у вигляді:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (7.7)$$

Рішенням такого рівняння є сімейство гармонічних функцій виду

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.8)$$

у чому можна переконатися, двічі обчисливши похідну за часом і підставивши її в рівняння (7.7). Параметр  $s_0$  називають амплітудою коливань,  $\omega_0$  – кутова частота,  $\varphi_0$  – початкова фаза коливань, сума  $\omega_0 t + \varphi_0$  – фаза коливань.

Коливання разом з кутовою частотою характеризують ще лінійною частотою  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , рівною числу коливань за одиницю часу, а також періодом коливань

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (7.9)$$

що характеризує тривалість одного коливання. Видно, що період

гармонічних коливань не залежить від початкових умов і дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (7.10)$$

для математичного і пружинного маятників відповідно. Щоб збудити власні коливання, потрібно спочатку при  $t = 0$  або відхилити тіло (надати початкове зміщення), або штовхнути (надати початкову швидкість), або і те і інше одночасно.

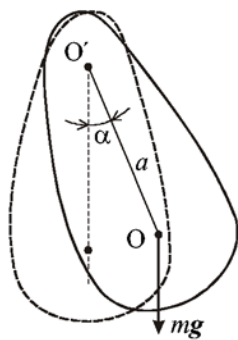
Одиниця виміру частоти  $[\nu]$  – герц (Гц); кутову частоту  $[\omega]$  вимірюють в зворотних секундах, 1/сек;  $\omega = 2\pi\nu$ .

Знання початкових умов  $s(0)$  і  $\dot{s}(0)$  дають можливість знайти амплітуду і початкову фазу коливань [1, 6, 27]:

$$s(0) = s(t = 0) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)_{t_0=0} = s_0 \sin \varphi_0;$$

$$v(0) = \dot{s}(0) = s_0 \omega_0 \cos \varphi_0;$$

$$s_0 = \sqrt{s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\omega_0 s(0)}{v(0)}.$$



**Рис. 7.3.**  
**Фізичний**  
**маятник**

Ще одним прикладом гармонічних коливань є коливання фізичного маятника. Фізичний маятник – тіло довільної форми масою  $m$ , закріплене на горизонтальній осі, яка перпендикулярна площині рисунка і яка проходить через точку закріплення  $O'$  (рис. 7.3). Центр мас тіла знаходиться в точці  $O$ , віддаленій від осі на відстань  $a$ . Відхилення маятника від положення рівноваги на невеликий кут  $\alpha$  призводить до здійснювання вільних гармонічних коливань під дією сили тяжіння, прикладеної до центру мас. Рівняння руху фізичного маятника запишеться у вигляді:

$$I \frac{d\omega}{dt} = N = -mga \sin \alpha. \quad (7.11)$$

де  $I$  – момент інерції цього тіла відносно осі обертання. Знак «мінус» означає, що момент сил спрямований проти додатного відліку кута  $\alpha$ .

Оскільки  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ , то  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ . Для малих кутів відхилення  $\sin \alpha \approx \alpha$  і рівняння (7.11) переходить в рівняння гармонічних коливань:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -\frac{mga}{I}\alpha; \\ \ddot{\alpha} + \frac{mga}{I}\alpha &= 0,\end{aligned}\tag{7.12}$$

яке по виду співпадає з рівнянням (7.7). Якщо прийняти позначення, прийняті вище, то отримуємо, що частота і період коливань рівні відповідно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}.\tag{7.13}$$

Порівнюючи вирази для періоду коливання фізичного маятника (7.13) і математичного (7.10) видно, що обидва періоди співпадають, якщо

$$\frac{I}{ma} = l.$$

Це так звана зведена довжина фізичного маятника, яка дорівнює довжині математичного маятника з таким же періодом коливань. Період коливання фізичного маятника (і його зведена довжина) залежить від відстаней  $a$ . Момент інерції фізичного маятника відносно точки підвісу необхідно обчислювати відповідно до теореми Гюйгенса-Штейнера  $I = I_0 + ma^2$ , де  $I_0$  – момент інерції відносно центру мас. Тоді (7.13) набере вигляду:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_0 + ma^2}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}}.$$

Висловимо деякі узагальнення [1, 2, 6]. Фізичні відмінності між розглянутими системами проявляється в тому, що параметр  $\omega_0$ , що

входить в усі рівняння коливань, визначається різними фізичними величинами:  $g, l$  у разі математичного маятника;  $k, m$  для коливання пружинного маятника;  $m, g, a, I$  – у разі фізичного маятника. Проте, їх об'єднує поведінка цих фізичних систем. Кожного разу виникає ситуація, коли система, яка виведена з положення рівноваги, відповідає на це виникненням сили, яка намагається повернути систему до рівноваги. У усіх наведених прикладах величина сили пропорційна величині зміщення, тобто є лінійний зв'язок між силою і зміщенням. Ця лінійність обумовлена додатковим припущенням – малістю відхилення від положення рівноваги.

Будь-яка система, поведінка якої описується рівнянням (7.7) називають гармонічним осцилятором, а рівняння називають рівнянням гармонічного осцилятора.

## 7.2 Умови гармонічності коливань

Для багатьох фізичних явищ моделлю для їх опису є дослідження поведінки цих систем в процесі малих відхилень від положення рівноваги, в якій ця система перебуває. Як можна проаналізувати рухи подібних систем? Наприклад, нехай ми маємо кулясту чашу, на дні якої знаходиться невелика кулька в стані спокою (рис. 7.4). Як описати, дослідити рух цієї кульки уздовж осі  $x$ , якщо її вивести з положення рівноваги? Щоб відповісти на це питання, необхідно знати компоненту сили, що діє на кульку, коли вона знаходиться в точці з певною координатою  $x$ , тобто  $f(x)$ , і розв'язати рівняння руху  $m\ddot{x} = f(x)$ . Як правило, залежність сили від координати – складна функція, рішення рівняння може привести до значних

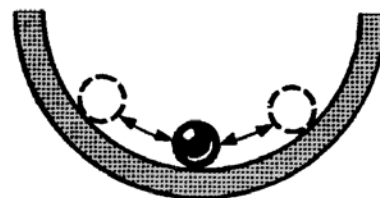


Рис. 7.4. Рухи кульки в чаші



математичних складнощів. Навіть якщо його вдається розв'язати, воно виявляється досить складним для аналізу.

У більшості практично важливих випадках задачу можна звести до рішення не для всіх можливих відхиленнях, а для малих [1]. Це значно спрощує її рішення. Яким чином це можна зробити? Яким би складним не був рух, якою б складною функцією не описувалася дія  $f(x)$ , цю функцію завжди можна розкласти в ряд Тейлора. Довільна функція, що визначена на деякому проміжку  $X$ , і має в деякій точці  $x_0 \in X$  похідні  $n$ -го порядку  $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0) \dots f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(x_0)$ , завжди може бути представлена у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Цей многочлен і його похідні до  $n$ -го порядку включно мають ті ж значення, що і функція  $f(x)$  і її похідні. Це чисто математичне твердження, і умови можливості такого розкладання в ряд розглядаються в курсі математичного аналізу. Як правило, всі функції  $f(x)$ , які зустрічаються в фізиці, зазвичай задовольняють усім умовам, що пред'являються до функцій, що розкладаються в ряд.

Розглянемо можливість застосування розглянутого підходу для опису коливальних рухів. Коливальний рух – це рух системи з одним ступенем свободи. Для його опису досить одного рівняння. Найбільш загальний вигляд такого рівняння дає закон збереження енергії під час руху в зовнішньому консервативному полі. В разі одновимірного руху будь-яка сила, яка залежить від координат, є консервативною, і для неї можна ввести потенціальну енергію  $U(x)$ . Тому для одновимірного руху замість функції  $f(x)$  розглядають  $U(x)$ . Нехай потенціальна енергія, як функція координат, має вигляд, показаний на рис. 3.16. Закон збереження енергії під час руху в

одновимірному випадку може бути записаний таким чином:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

У класичній ньютонівській механіці кінетична енергія точки завжди величина додатна, тому рух точки можливий тільки в областях, де  $U(x) \leq E$ , тобто коли точка знаходиться в потенціальній ямі (див. підрозділ 3.12). Існує тільки одна точка в межах руху  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , де рухома частинка може знаходитися в положенні стійкої рівноваги – це точка, де її потенціальна енергія мінімальна  $U(x) = U_{\min}$ . Таким чином, в потенціальній ямі частинка здійснює фінітний рух поблизу координати  $x_0$  – положення її стійкої рівноваги.

Поблизу стійкого положення рівноваги потенціальну енергію, незважаючи на те, що вона може бути достатньо складною функцією координати, завжди можна розкласти в ряд Тейлора:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU(x_0)}{dx} \frac{1}{1!} (x - x_0) + \frac{d^2U(x_0)}{dx^2} \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{d^3U(x_0)}{dx^3} \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{d^n U(x_0)}{dx^n} (x - x_0)^n \frac{1}{n!}. \quad (7.14)$$

Перенесемо початок координат в точку  $x = x_0$ , тобто  $x_0 = 0$ . Тоді з (7.14) маємо:

$$U(x) = U(0) + 0 + \frac{1}{2} \frac{d^2U(0)}{dx^2} x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U(0)}{dx^3} x^3 + O(x^n), \quad (7.15)$$

де в розкладанні (7.15) враховано, що функція  $U(x)$  в точці  $x = x_0$  має екстремум,  $U(x_0) = U_{\min}$ , і її перша похідна в цій точці перетворюється на нуль. Унормуємо потенціальну енергію так, щоб  $U(0) = 0$  і введемо такі позначення:

$$\frac{d^2U(0)}{dx^2} = k; \quad \frac{d^3U(0)}{dx^3} = \beta.$$

Нехтуючи доданками з похідними порядку вище за третю, отримуємо:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\beta x^3}{6}. \quad (7.16)$$

Оскільки

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -kx - \frac{\beta x^2}{2},$$

то для рівняння руху отримуємо:

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx - \frac{\beta x^2}{2}; \quad \frac{dU}{dx} < 0, \quad F < 0,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\beta}{2m}x^2 = 0. \quad (7.17)$$

Отримане рівняння (7.17) описує нелінійні коливання. В реальних фізичних системах під час малих відхилень від положення рівноваги, як

правило  $\frac{d^3U(0)}{dx^3} = \beta \ll \frac{d^2U(0)}{dx^2}$ , і цей доданок в (7.17) вважають рівним

нулю або ним нехтують. Потенціальна енергія (7.16) в цьому випадку

набирає вигляду  $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ , а рівняння руху – вигляд рівняння

гармонічних коливань:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x^2 &= 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Отже, у більшості практично значимих випадках під час руху в потенціальних полях малі відхилення від положення рівноваги означають розкладання  $U(x)$  в ряд Тейлора поблизу точки рівноваги і нехтування в розкладанні доданками, що містять похідні третього і більш високого

порядків, що і призводить до рівняння гармонічних коливань. Це не означає, що гармонічними коливаннями можуть бути тільки малі коливання. Коливання, що описуються рівнянням (7.18) є гармонічними незалежно від малості  $x$ .

Потенціальна енергія коливань в полі потенціальних сил для малих відхилень від положення рівноваги завжди виражається через квадрат координати

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Тільки для таких коливань повна механічна енергія, що зберігається, може бути виражена у вигляді квадратичної функції від координати і її першої похідної за часом, тобто представлена у вигляді:

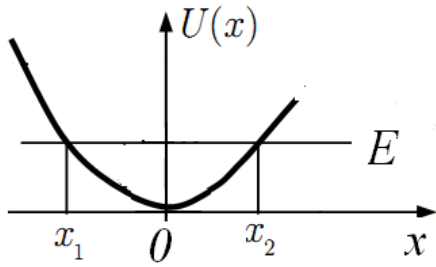
$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (7.19)$$

У цьому випадку власними коливаннями системи є гармонічні коливання, а частота коливань  $\omega$  визначається повністю лише властивостями механічної системи і не залежить від початкових умов. Ця властивість частоти також пов'язана з малістю відхилень від положення рівноваги. Воно зникає, якщо переходити до більш високих наближень в розкладанні (7.15). Ця властивість є також наслідком квадратичної залежності потенціальної енергії від координати.

### **Приклад [19]**

Знайти період малих коливань, користуючись виразом для повної енергії (7.19). Повна енергія є диференціальним рівнянням першого порядку, яке можна інтегрувати розділенням змінних:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right)};$$



$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right)}}$$

**Рис. 7.5. Коливання частинки в полі консервативних сил**

Потенціальна енергія точки  $U(x) = \frac{kx^2}{2}$  має

вигляд, показаний на рис. 7.5, де  $E$  – повна механічна енергія точки. Частинка здійснює одновимірний фінітний коливальний рух в потенціальній ямі, обмежений координатами  $x_1, x_2$ . Час руху від  $x_1$  до  $x_2$  дорівнює часу зворотного руху від  $x_2$  до  $x_1$  в силу симетрії задачі. Період коливань  $T$ , тобто час руху від  $x_2$  до  $x_1$  і назад дорівнює подвоєному часу проходження відрізка  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right)}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} k \left( \frac{2E}{k} - x^2 \right)}} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \Big|_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Точки  $x_1, x_2$  є коренями рівняння  $U(x) = E$ . У точках  $x_1, x_2$  кінетична енергія перетворюється на нуль і  $U(x) = E$ , в точці мінімуму, де  $U(x) = 0$ , кінетична рівна потенціальній. Таким чином

$$x_1, x_2 = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}},$$

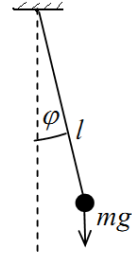
і межі інтегрування симетричні. Звідси, після підстановки границь у вираз для періоду і обчислень отримуємо:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

що збігається з (7.10) для пружинного маятника.

### Приклад [12]

Знайти період малих коливань математичного маятника масою  $m$ , підвішеного на нитці довжиною  $l$ , виходячи із закону збереження енергії (рис. 7.6). Маємо систему з одним ступенем свободи, для якої змінною величиною, що характеризує коливання, можна вибрати кут відхилення  $\varphi$  від положення рівноваги. Знайдемо повну енергію маятника для малих коливань. Потенціальна енергія для відхилень на кут  $\varphi$ :



**Рис. 7.6. До розрахунку періоду коливань математичного маятника**

$$U = mgh = mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Умова малості коливань:  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тоді  $U = mgl \frac{\varphi^2}{2}$ .

Видно, що потенціальна енергія є квадратичною функцією кута відхилення. Повна енергія маятника:

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \frac{\varphi^2}{2},$$

де  $\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$  – кінетична енергія маятника, момент інерції для математичного маятника  $I = ml^2$ . Повна енергія є квадратичною функцією від кута відхилення і його першої похідної за часом. Повна енергія зберігається. Після розділення змінних в диференціальному рівнянні для повної енергії отримуємо:

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} \left( E - \frac{mgl\varphi^2}{2} \right)}}.$$

Період коливань знайдемо інтегруванням останнього виразу за кутом відхилення:

$$T = 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} \left( E - \frac{mgl\varphi^2}{2} \right)}},$$

у якому межі інтегрування знаходять з рішення рівняння  $E = \frac{mgl\varphi^2}{2}$ .

Маємо:  $\varphi_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{mgl}}$ . Інтеграл зводиться до функції  $\arcsin$ . Після

підстановки меж інтегрування і обчислень отримуємо:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

що збігається з (7.10) для математичного маятника.

Якщо амплітуда коливань не мала і така, що  $\sin \alpha \neq \alpha$ , тоді для знаходження величини відхилення від положення рівноваги необхідно розв'язувати нелінійне диференціальне рівняння. Наприклад, для фізичного маятника отримуємо наступне рівняння:

$$I\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha;$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{mgl}{I} \sin \alpha.$$

Рішення цього рівняння зводиться до розрахунку інтеграла

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\alpha_0/2) - \sin^2(\alpha/2)}} = 2\sqrt{k}t, \quad (7.20)$$

у якому  $k = \frac{mga}{I}$ , і який називають еліптичним інтегралом. Цей інтеграл

досконало вивчений і може бути обчислений тільки чисельно [1, 27].

Складені таблиці цього інтеграла, за допомогою яких можна проаналізувати коливання маятника. Рухи маятника періодичні, але не гармонічні. Такий маятник називають ангармонічним маятником.

### 7.3 Енергія гармонічного осцилятора

Для одновимірного фінітного руху автоматично забезпечується умова потенціальності сил, і всяку силу можна розглядати як потенціальну, якщо вона залежить тільки від координат.

Для лінійного осцилятора в полі консервативної сили можна вважати, що потенціальна енергія частинки дорівнює нулю в положенні рівноваги (на початку координат). В процесі максимального відхилення від положення рівноваги маятник на мить залишається в стані спокою, це точка зупинки, і потім починає рухатися в протилежний бік. В цей момент (в момент зупинки в точці максимального відхилення) його кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна енергія максимальна. Повна енергія незгасаючих коливань зберігається. Звідси виходить, що і кінетична, і потенціальна енергії кожна окремо здійснює коливальний процес в часі [3]. За період коливань маятник двічі проходить положення рівноваги, а період коливань потенціальної енергії вдвічі менший від періоду коливань маятника. Так само, з таким же періодом коливається і кінетична енергія.

Оскільки  $F = -\frac{dU}{dx}$ , а  $U = \frac{kx^2}{2}$ , де  $k = \frac{d^2U(0)}{dx^2}$ , але з іншого боку,

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ , то  $k = \omega^2 m$ . Звідси

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{m\omega^2 x^2}{2}; \quad T = \frac{m\dot{x}^2}{2}; \\ E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \text{const.} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Нехай  $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ . Тоді  $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$ . У момент проходження маятником координати положення рівноваги швидкість його максимальна. Водночас  $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ ,  $\dot{x}^2 = \omega^2 A^2$ ,  $U(x) = 0$ . Повна енергія в цей момент

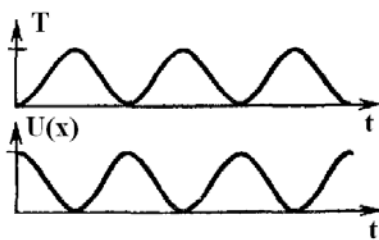


$$E = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

В крайніх положеннях  $\dot{x} = 0$ ,  $x = A$ . Кінетична енергія  $T = 0$ . Повна енергія

$$E = U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

Графік зміни потенціальної і кінетичної енергії з часом показаний на рис. 7.7.



**Рис. 7.7. Коливання кінетичної і потенціальної енергій**

Звідси виходить, що [1]:

1. Максимальна кінетична енергія осцилятора дорівнює його максимальній потенціальній енергії.

2. Середня кінетична енергія дорівнює його середній потенціальній. Покажемо це. Як

відомо, середнє значення якої-небудь функції за проміжок часу  $t$  може бути визначене таким чином:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(t) dt.$$

Нехай

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi);$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi);$$

$$T = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2};$$

$$U(x) = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}.$$

Період коливань  $T$  візьмемо як час  $t$  для обчислень середніх значень кінетичної і потенціальної енергій. Обчислення середнього значення шуканих величин таким чином зводиться до обчислення середнього

значення від  $\cos^2(\omega t + \varphi)$  і  $\sin^2(\omega t + \varphi)$ :

$$\begin{aligned}\langle \cos^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{T} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) \right] \Big|_0^T = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Аналогічним чином:

$$\begin{aligned}\langle \sin^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [1 - \cos^2(\omega t + \varphi)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt - \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = 1 - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)] dt = \\ &= 1 - \frac{1}{T} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) \right] \Big|_0^T = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Отже, середнє значення кінетичної і потенціальної енергій співпадають:

$$\langle T \rangle = \langle U(x) \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{4}. \quad (7.22)$$

## 7.4 Згасаючі власні коливання

Власні гармонічні коливання завжди здійснюються поблизу стійкого положення рівноваги, якщо сила, що є поворотної, пропорційна відхиленню тіла від положення рівноваги. Власні коливання лінійного осцилятора відбуваються за відсутності зовнішніх сил. Енергія його коливань зберігається, амплітуда не змінюється. Тому власні коливання – це незгасаючі коливання.

В реальних системах завжди відбувається дисипація енергії. Якщо енергія, яка втрачається, не компенсуватиметься за рахунок зовнішніх пристроїв, то коливання згасатимуть і через певний проміжок часу припиняться зовсім.

Основною зовнішньою силою є тертя. Енергія коливань зменшується, отже, зменшується і амплітуда, коливання стають згасаючими, змінюється їх частота.

Вважатимемо, що для малих коливань, тобто малих відхиленнях від положення рівноваги, для яких  $\sin \alpha \approx \alpha$ , швидкість мала, і сила тертя пропорційна швидкості руху, тобто на систему, що коливається, діють сили в'язкого тертя.

Для формального опису згасаючих коливань використаємо рівняння:

$$m\ddot{s} = F_{\tau}(s) + F_{\text{тер}}(\dot{s}).$$

Сила опору («тертя») залежить як від величини швидкості (для руху у в'язкому середовищі), так і від напрямку (для сухого тертя). Оскільки поворотна сила пропорційна зміщенню (7.6), де коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ , то рівняння можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= \frac{F_{\text{тер}}}{m} - \omega_0^2 s; \\ \ddot{s} - \frac{F_{\text{тер}}}{m} + \omega_0^2 s &= 0,\end{aligned}\tag{7.23}$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – власна частота незгасаючих гармонічних коливань.

Вважатимемо, що  $F_{\text{тер}} = -\gamma\dot{s}$ , де  $\gamma$  – стала величина. Тоді рівняння (7.23) перепишемо таким чином:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0,\tag{7.24}$$

у якому  $\delta = \frac{\gamma}{2m}$  – коефіцієнт загасання.

Рішення отриманого однорідного лінійного диференціального рівняння (7.24) шукатимемо у вигляді [6, 15, 27]:

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t}.\tag{7.25}$$

Підставимо (7.25) в (7.24), обчисливши відповідні похідні:

$$s_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) = 0.$$

Оскільки  $e^{\lambda t} \neq 0$ , то отримуємо так зване характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (7.26)$$

яке в даному випадку, як рівняння другого порядку має два корені:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

а саме рівняння (7.25) – два незалежні рішення:

$$s_1(t) = s_{01} e^{\lambda_1 t}; \quad s_2(t) = s_{02} e^{\lambda_2 t}.$$

Оскільки диференціальне рівняння (7.24) – лінійне, то і будь-яка суперпозиція, тобто сума двох його незалежних рішень також є рішенням цього рівняння і загальне рішення цього рівняння, таким чином, матиме вигляд:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_{01} e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + s_{02} e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} = \\ &= e^{-\delta t} \left( s_{01} e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + s_{02} e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Незалежні сталі визначимо з початкових умов.

Як видно з (7.27), залежно від співвідношення між величинами  $\delta$  і  $\omega_0$  можливі три випадки.

Якщо  $\delta < \omega_0$ , то  $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Початкові умови дійсні, і в процесі рішення використовуватимемо формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \quad (7.28)$$

Підставляючи значення кореня в (7.27), отримуємо:

$$s(t) = e^{-\delta t} \left( s_{01} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} + s_{02} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} \right). \quad (7.29)$$

Величина  $s(t)$  має бути дійсним числом, тому  $s(t) = s^*(t)$ , тобто величина, комплексно спряжена, повинна співпадати з дійсною:

$$s_{01}e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t} + s_{02}e^{i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t} = s_{01}^*e^{i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t} + s_{02}^*e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t}.$$

Це виконується для будь-якого значення  $t$ , якщо  $s_{02} = s_{01}^*$ ;  $s_{01} = s_{02}^*$ .

Представимо  $s_{01}$  у вигляді:

$$s_{01} = \frac{1}{2}s_0e^{-i\varphi}.$$

Величина  $s_{02}$ , згідно отриманого вище зв'язку, дорівнюватиме  $s_{02} = \frac{1}{2}s_0e^{i\varphi}$ ,

де  $s_0$ ,  $\varphi$  – дійсні числа. Підставимо ці числа в (7.29):

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-\delta t} \left( \frac{1}{2}s_0e^{-i(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi)} + \frac{1}{2}s_0e^{i(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi)} \right) = \\ &= \frac{1}{2}s_0e^{-\delta t} \left[ \cos(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi) - i\sin(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi) + i\sin(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi) \right] = \\ &= s_0e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

де  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Остаточного отримуємо:

$$s(t) = s_0e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.30)$$

Коливання, які описуються таким рівнянням, є згасаючими коливаннями з частотою  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Це не гармонічні коливання, амплітудою цих коливань є величина

$$A(t) = s_0e^{-\delta t},$$

і вона монотонно убыває з часом. Коефіцієнт  $\delta = \frac{\gamma}{2m}$  характеризує швидкість згасання. Амплітуда згасаючих коливань зменшується, причому обвідна графіка на

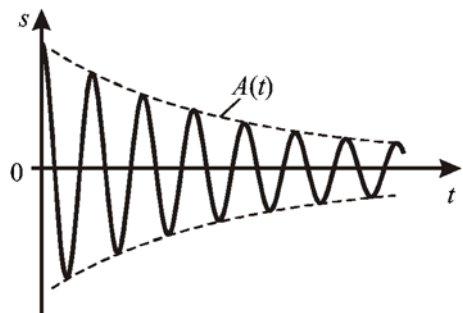


Рис. 7.8, Згасаючі коливання

рис. 7.8 не виходить за межі  $\pm s_0e^{-\delta t}$ , а частота постійна. Поняття періоду у

таких коливань відсутня, оскільки коливання не повторюються. Вводять поняття умовного періоду згасаючих коливань  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Величина  $\tau = \frac{1}{\delta}$  має розмірність часу і називається часом загасання або часом релаксації. Якщо  $\delta$  підставити у вираз для амплітуди  $A(t)$ , то після закінчення часу згасання  $\tau$  амплітуда зменшиться в  $e$  разів. Кількість здійснених системою коливань за час  $\tau$  дорівнює відношенню цього часу до періоду згасаючих коливань

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta T}.$$

Якщо загасання мале,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$ , то звідси

$$N = \frac{\omega_0}{2\delta\pi} \gg 1,$$

тобто число коливань може бути достатньо велике.

Експоненціальний закон убуття амплітуди від часу дає можливість ввести безрозмірний параметр – **логарифмічний декремент загасання**  $\theta$ , який дорівнює логарифму відношення двох послідовних відхилень в один і той же бік:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (7.31)$$

Оскільки  $\delta = \frac{1}{\tau}$ , то  $\delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$ . Отже

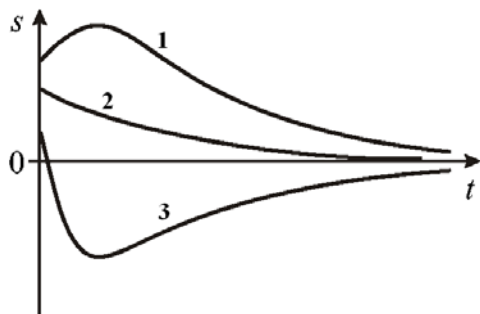
$$\theta = \frac{1}{N}. \quad (7.32)$$

Тому логарифмічний декремент загасання – це величина, обернена числу коливань, протягом яких амплітуда згасає в  $e$  разів. Або: амплітуда коливань згасає в  $e$  разів впродовж числа коливань, яке дорівнює величині логарифмічного декременту загасання.

Для характеристики коливань вживається також величина

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N, \quad (7.33)$$

яку називають добротністю коливальної системи. З її визначення виходить, що добротність пропорційна числу коливань  $N$ , здійснюваних системою за той час  $\tau$ , за яке амплітуда зменшиться в  $e$  разів. Величина  $Q$  є характеристикою відносної швидкості згасання коливального процесу: чим більше добротність, чим більше число коливань здійснює вільний осцилятор до того, як його коливання помітно згасають (амплітуда зменшиться в  $e$  разів). Великою добротності характеризують також енергетичні співвідношення в системі, що здійснює згасаючі коливання. Вона пропорційна відношенню середньої енергії коливань  $E(t)$  до енергії  $\Delta E_T$ , яка втрачається за період. Якщо енергія  $E(t)$  убиває за експоненціальним законом, то добротність в цьому випадку – величина постійна.



**Рис. 7.9. Критичний режим коливань**

Розглянемо випадок, коли корені характеристичного рівняння (7.26) кратні:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . Водночас частота коливань  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$ , тобто коливань немає. Загальне рішення має вигляд [6, 27]:

$$s(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} \quad (7.34)$$

Незалежні постійні в цьому рівнянні знаходять з початкових умов. Для  $s(0) = s_0$ ;  $\dot{s}(0) = v_0$ ;

$$s(t) = [s_0(1 + \delta t) + v_0 t]e^{-\delta t}. \quad (7.35)$$

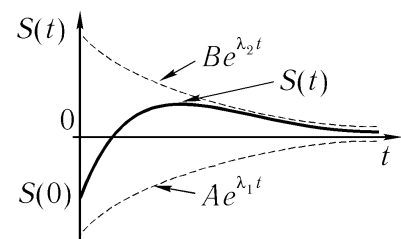
Можливі види залежності  $s(t)$  за різних початкових умов показані на рис. 7.9. Характерною особливістю цих кривих є те, що вони перетинають вісь

часу не більше одного разу. Такий режим руху називають критичним. Повернення до рівноважного стану системи, виведеної з нього, виконується за час порядку декількох  $\tau$ .

У третьому випадку, для  $\delta > \omega_0$ , загальне рішення рівняння (7.27) є сумою двох експонент, що убивають з часом, оскільки  $-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$ . В цьому випадку в'язке тертя велике і більше, ніж в критичному режимі. Такий режим називають аперіодичним або закритичним. Можлива залежність  $s(t)$  показана на рис. 7.10. Рішення тут можна представити у вигляді суми двох експонент, які монотонно убивають ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ) [14]:

$$s(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}. \quad (7.36)$$

Безпосередня підстановка показує, що функції (7.36) є рішенням рівняння (7.24). Постійні можуть бути знайдені з початкових умов. Це схоже на коливання маятника в сильно в'язкому середовищі. Маятник з відхиленого стану повільно опускається до стану рівноваги, коливань немає.



**Рис. 7.10. Аперіодичні коливання**

## 7.5 Вимушені коливання

Як встановлено вище, вільні коливання реальної системи є згасаючими. Щоб збудити і підтримувати в такій системі незгасаючі коливання, необхідно компенсувати втрати енергії, обумовлені силами тертя. Це можна здійснити, впливаючи на систему змінною зовнішньою силою  $F$ , що змінюється в простому і практично найбільш важливому випадку за гармонічним законом. Коливання, що виникають внаслідок цього, називають вимушеними коливаннями. Характер руху осцилятора



зміниться залежно від особливостей дії сили. Вважатимемо, що дія сили достатньо слабка, щоб тим самим підтримувати малі коливання.

Припустимо, що зовнішня сила, що діє на осцилятор, може бути записана таким чином:

$$F = F_0 \cos \Omega t, \quad (7.37)$$

де  $F_0$  – амплітуда сили,  $\Omega$  – її частота. Також вважатимемо, що в системі діє тертя, сила якого пропорційна швидкості. Рівняння руху запишеться у такому разі у вигляді:

$$m\ddot{s} + \gamma\dot{s} + ks = F_0 \cos \Omega t,$$

або, поділивши на масу:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (7.38)$$

Рух осцилятора залежить від руху в момент початку дії сили, причому це буде тривати певний проміжок часу. З часом вплив початкових умов слабшає, і осцилятор переходить в режим встановленого коливання. Які б не були умови в момент початку дії зовнішньої сили, через певний проміжок часу осцилятор буде здійснювати усталені коливання.

Тривалість перехідного періоду визначається часом загасання  $\tau = \frac{1}{\delta}$ . Після усталеного режиму коливань можна вважати, що сила, що змушує коливання, почала діяти давно, тобто діє нескінченно далекий проміжок часу, і можна прийняти, що отримане рівняння справедливе для всіх моментів часу.

Для роз'язу рівняння (7.38) зручно скористатися комплексною формою гармонічних коливань, записавши те ж саме і для сили в правій частині [1, 5, 6, 27]. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}, \quad (7.39)$$

в якому  $F_0$  – дійсне число. Його рішення дається дійсною частиною загального рішення. Шукати рішення будемо у вигляді:

$$s = Ae^{i\alpha t}. \quad (7.40)$$

Тут  $A$  не є дійсною величиною. Підставимо (7.40) в рівняння (7.39), обчисливши необхідні похідні:

$$Ae^{i\alpha t}(-\alpha^2 + 2i\delta\alpha + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}. \quad (7.41)$$

Отримане співвідношення повинно бути справедливе для всіх моментів часу, тобто не залежати від часу. Умовою цього є те, що  $\alpha = \Omega$ . Звідси отримуємо:

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\delta\Omega]} = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) - 2i\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} = \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \left( \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} - i \frac{2\delta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \right), \end{aligned}$$

де перший вираз множимо і ділимо на комплексно спряжене до знаменника число і приводимо до виду

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

в якому

$$\begin{aligned} r &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}; \\ \cos\varphi &= \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}; \quad \sin\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

де  $r$  – модуль, а  $\varphi$  – аргумент комплексного числа відповідно. Звідси виходить, що  $A$  насправді величина комплексна, яка має вигляд:

$$A = A_0 e^{i\varphi},$$

і для якого  $A_0 = r$ , тобто є модулем комплексного числа в (7.42), аргумент якого

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}.$$

Комплексне рішення початкового рівняння (7.39) має вигляд:

$$\tilde{s} = A_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}, \quad (7.43)$$

а дійсна частина (7.43) є рішенням дійсного рівняння (7.38), і це рішення має вигляд:

$$\operatorname{Re} \tilde{s} = s(t) = A_0 \cos(\Omega t + \varphi), \quad (7.44)$$

де  $A_0$  і  $\Omega$  визначені вище,  $\Omega$  – частота сили, що змушує коливання.

Отже, під впливом зовнішньої вимушувальної гармонічної сили осцилятор здійснює вимушені гармонічні коливання з частотою цієї сили. Фаза і амплітуда цих коливань визначаються властивостями сили і характеристиками осцилятора, величини  $A_0$  і  $\operatorname{tg} \varphi$  повністю визначають вимушені коливання. Залежність  $A_0$  від частоти вимушувальної сили  $\Omega$  називають амплітудно-частотною характеристикою процесу вимушених коливань, залежність  $\varphi(\Omega)$  – фазовою характеристикою.

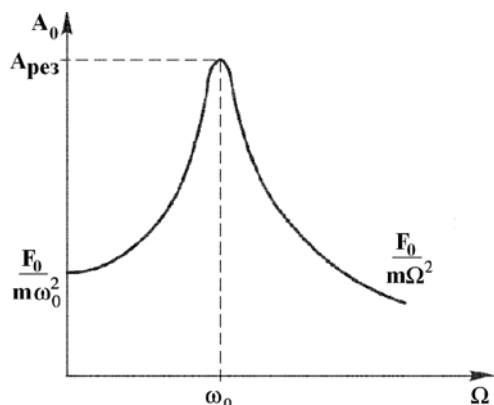
## 7.6 Амплітудно-частотна характеристика. Явище резонансу

Розглянемо зміну амплітуди вимушених коливань. Крива, що описує залежність амплітуди вимушених встановлених коливань від частоти зовнішньої сили, приведена на рис. 7.11. Максимальне значення амплітуда досягає, коли частота зовнішньої сили наближена до частоти власних коливань осцилятора ( $\Omega \approx \omega_0$ ). Коливання з максимальною амплітудою називають резонансними, а саме явище «розгойдування» коливань до максимальної амплітуди для  $\Omega \approx \omega_0$  називають **резонансом**. Під час

відхилення частоти зовнішньої сили від резонансної амплітуда різко зменшується.

Розглянемо фізичну картину цього явища в різних областях частот, тобто на різних стадіях дії вимушувальної сили [1, 27]. Припустимо,

що тертя мале, тобто  $\delta \ll \omega_0$ .



**Рис. 7.11. Амплітудна резонансна крива**

**Випадок перший.** Розглянемо область частот, де  $\Omega \ll \omega_0$ . Якщо частота вимушувальної сили значно менша від  $\omega_0$ , то швидкість і прискорення  $\ddot{s}$  системи, що коливається, будуть достатньо малими. З формули для амплітуди (7.42), якщо нехтувати величиною  $\Omega$  виходить, що

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Звідси можна зробити висновок про те, що для малої частоти зовнішньої сили вона діє як стала статична сила. Під дією такої сили максимальне зміщення дорівнює

$$s_{\max} = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Таке зміщення можна отримати у тому випадку, коли в початковому рівнянні руху (7.38) нехтувати першими двома доданками в його лівій частині. Ці доданки менші від доданка  $\omega_0^2 s$ , і в наближеному виді воно зводиться до рівняння

$$\omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

Рішення цього отриманого рівняння очевидне:

$$s(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos\Omega t = \frac{F_0}{k} \cos\Omega t, \quad (7.45)$$

у якому  $k$  – жорсткість пружної поворотної сили. В цьому режимі зміщення пропорційно зовнішній силі, і в кожний момент часу зміщення є таким, яким воно було б, коли сила не змінювалася б з часом і дорівнювала б її миттєвому значенню. Сили тертя ролі не грають через їх малість. Рішення (7.45) являється, по суті, математичним виразом закону Гука для статичної деформації пружини. Такий режим коливань – це так званий квазістатичний (мов би статичний) режим.

**Випадок другий,**  $\Omega \gg \omega_0$ . З формули (7.42) отримаємо для амплітуди такий вираз:

$$A_0 = \frac{F_0}{m\Omega^2}.$$

нехтуючи величиною  $\omega_0^2$ , і як і раніше, вважаючи, що  $\delta$  мале.

Для достатньо великої частоти зовнішньої сили доданок  $\ddot{s}$  в лівій частині (7.38) набагато більший від двох інших доданків. Насправді, як виходить з (7.44)

$$s(t) = A_0 \cos(\Omega t + \varphi);$$

$$\ddot{s} = -s\Omega^2.$$

Отже,  $|\ddot{s}| = |s\Omega^2|$  і для великих частот вимушувальної сили  $|\ddot{s}| \gg |\omega_0^2 s|$ ;  $|\ddot{s}| \gg |2\delta\omega_0 \dot{s}|$ . Рівняння (7.38) в цьому випадку має вигляд:

$$\ddot{s} = \frac{F_0}{m} \cos\Omega t.$$

Інтегруючи його двічі, знаходимо закон руху системи, що коливається:

$$s(t) = -\frac{F_0}{m\Omega^2} \cos\Omega t = \frac{F_0}{m\Omega^2} \cos(\Omega t + \pi). \quad (7.46)$$

Для  $\Omega \gg \omega_0^2$  період вимушених коливань  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  малий. З рішення виходить, що маса, що коливається, зазнає лише дію зовнішньої сили, а сили пружності і в'язкого тертя малі. Маса не встигає набрати ні помітної швидкості, ні зміститися на достатню величину від положення рівноваги. З (7.46) видно, що зміщення відстає по фазі від зовнішньої сили на  $-\pi$ , амплітуда убиває зі збільшенням частоти. Осцилятор рухається тільки за рахунок зовнішньої сили.

**Випадок третій,  $\Omega \approx \omega_0$ .**

Це випадок резонансу. Під час резонансу амплітуда має максимальне значення (вважаючи як і раніше, що  $\delta \ll \omega_0$ )

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta\omega_0}.$$

Вимушені коливання відбуваються на власній частоті коливань. Щоб отримати таке значення резонансної амплітуди, в початковому рівнянні (7.38) ми повинні припустити, що в лівій його частині доданок, пов'язаний з прискоренням, дорівнює доданку, пов'язаному з пружною силою таким чином, що вони взаємно компенсуються, тобто  $\ddot{s} = -\Omega^2 s = -\omega_0^2 s$ . Тоді рівняння руху набуває вигляду:

$$\begin{aligned} 2\delta\dot{s} &= \frac{F_0}{m} \cos\omega_0 t; \\ \dot{s} &= \frac{F_0}{2\delta m} \cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Після інтегрування отримуємо вираз для зміщення:

$$s(t) = \frac{F_0}{2\delta m\omega_0} \sin\omega_0 t. \tag{7.48}$$

Максимального значення амплітуда досягає не точно для  $\Omega \approx \omega_0$ , а поблизу нього.

Знайдемо добротність коливальної системи, яка в даному випадку характеризує зростання амплітуди його коливань в резонансі порівняно із статичним її значенням, тобто під час зміщення під дією сталої сили:

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{остат}}} = \frac{\Omega}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta}.$$

Звідки виходить, що чим менше загасання осцилятора, тим енергійніше він розгойдується в резонансі.

## 7.7 Фазова характеристика вимушених коливань

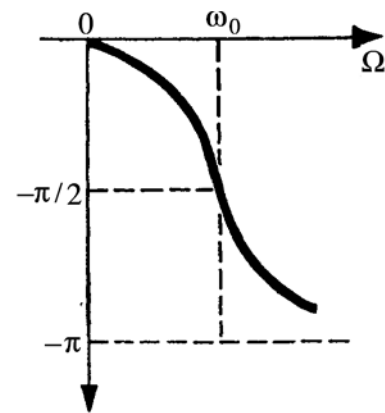
Іншою важливою характеристикою вимушених коливань є співвідношення їх фази і фази зовнішньої сили (рис. 7.12). Зміщення з положення рівноваги (7.44) під час вимушених коливань визначається в тому числі фазою  $\varphi$ , оскільки залежність вимушувальної сили від часу дається функцією  $\cos\Omega t$ . Для  $\varphi < 0$  зміщення запізнюється по фазі від зовнішньої сили. Залежність фази  $\varphi$  від частоти зовнішньої сили дається виразом

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (7.49)$$

Для малих частот  $\Omega \ll \omega_0$   $\varphi$  мале і від'ємне, зміщення відстає по фазі від сили на невелику величину. Із зростанням частоти  $\Omega$  відставання зміщення по фазі зростає. Під час резонансу зміщення відстає від сили на  $\pi/2$ . Тобто, у той момент, коли сила максимальна, зміщення дорівнює нулю, а коли сила дорівнює нулю, зміщення максимальне. З подальшим збільшенням частоти відставання зміщення від сили наростає, і для достатньо великих частот, коли  $\Omega \gg \omega_0$ , наближається до  $\pi$ . Отже, зміщення і сила спрямовані майже протилежно, оскільки  $\cos(\Omega t - \pi) = -\cos\Omega t$ . Тому, коли сила

досягає максимального додатного значення, зміщення має максимальне від'ємне значення. Потім сила і зміщення змінюються в протилежних напрямках, проходячи майже одночасно через нульове значення [1].

Фазові співвідношення уможливають детальніше проаналізувати явище резонансу. Як виходить з (7.47), швидкість руху тіла і сила коливаються в одній фазі, тобто сила і швидкість співпадають за напрямом. Отже, робота зовнішньої сили досягає максимального значення. За відсутності резонансу сила співпадає за напрямком із швидкістю впродовж деякого часу, енергія осцилятора в цей час збільшується, а впродовж деякого іншого часу спрямована проти швидкості, і його енергія зменшується. Тому резонанс можна характеризувати наявністю найбільш сприятливих умов для передачі енергії від джерела зовнішньої сили до осцилятора [6]. Найбільш несприятливі умови для передачі енергії – коли у співвідношеннях між частотою власних коливань осцилятора і частотою зовнішньої сили досягають крайніх значень, тобто коли  $\Omega \ll \omega_0$  і  $\Omega \gg \omega_0$ , тобто коли фази сили і швидкості відрізняються майже на  $\pi/2$ . Для цих співвідношень частот енергія передається незначно, тому в цих випадках амплітуда коливань невелика (див. рис. 7.11).



**Рис. 7.12. Фазова характеристика вимушених коливань**

## 7.8 Встановлення коливань

Вище ми розглянули стаціонарні вимушені коливання. Під час зміни амплітуди зовнішньої сили або зміни її частот в тій системі, на яку діє



зовнішня сила, завжди виникають власні згасаючі коливання. Тому тільки через певний час після якої-небудь зміни зовнішньої гармонічної сили коливання в системі, на яку діє ця сила, будуть гармонічними. Спочатку власні коливання, складаючись з вимушеними, дадуть складну картину руху, що називається перехідним періодом.

Це можна показати математично [6, 14]. Встановлення коливань пов'язане з тим фактором, що разом з вимушеними коливаннями на частоті  $\Omega$  збуджуватимуться і власні коливання на частоті  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , які згасатимуть. Рівняння вимушених коливань було записане у вигляді (7.38):

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

З математики відомо, що загальне рішення лінійного неоднорідного рівняння, яким є рівняння вимушених коливань, для  $\delta < \omega_0$  має вигляд:

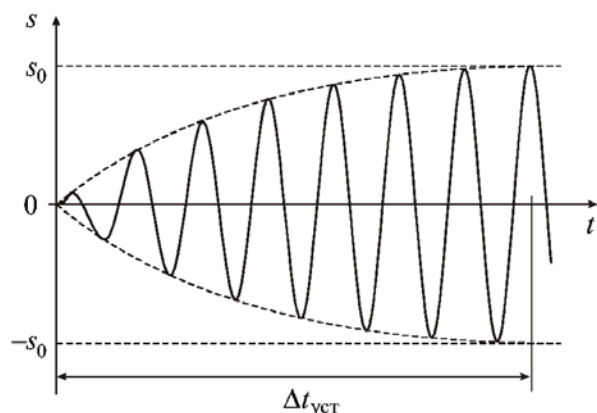
$$s(t) = s_{0c} e^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_c\right) + s_0 \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (7.50)$$

Це рішення є суперпозицією власних згасаючих коливань на частоті  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  (перший доданок справа в (7.50)) і незгасаючих вимушених на частоті  $\Omega$  (другий доданок в правій частині тієї ж формули). Останні встановляться тоді, коли згаснуть власні, тобто по закінченню часу релаксації:

$$\Delta t_{\text{вст}} \approx \tau = \frac{1}{\delta}.$$

За цей час в систему «закачується» енергія, оскільки до встановлення коливань робота зовнішньої сили перевищує роботу сил тертя. У режимі, що встановився, спостерігається баланс енергій, що прибуває і витрачається. За початкових умов  $s(0) = 0$ ;  $\dot{s}(0) = 0$ ;  $\delta \ll \omega_0$  і якщо  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , співвідношення для загального вирішення (7.50) набирає

вигляду:



**Рис. 7.13. Встановлення вимушених коливань**

$$s(t) = s_0 \left(1 - e^{-\delta t}\right) \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

оскільки за цих умов  $s_{0c} = s_0$ ,  $\varphi_c = -\varphi_0 \approx \pi/2$ . Коливання маятника, коли включається зовнішня гармонічна сила, частота якої співпадає з власною частотою маятника, показана на рис. 7.13.

Як видно, через деякий час

$$\Delta t_{\text{вст}} \approx \frac{1}{\delta} \quad \text{маятник почне}$$

здійснювати стаціонарні гармонічні вимушені коливання.

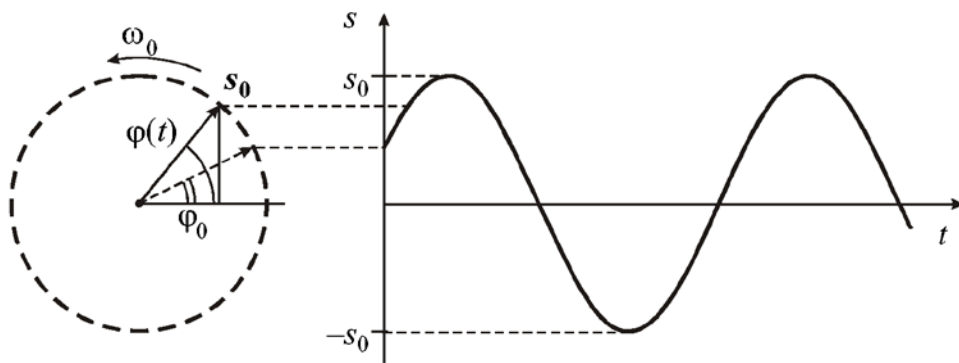
Отже, в початковий момент виникають такі власні коливання, які зменшують амплітуду вимушених коливань.. Коли власні коливання згаснуть, маятник здійснюватиме тільки вимушені коливання. Перехідний процес триватиме тим довше, чим менше згасання власних коливань.

## 7.9 Додавання коливань однакової частоти

Для рішення багатьох задач зручно користатись геометричною інтерпретацією гармонічних коливань [1, 6]. Нехай ми маємо гармонічне коливання виду

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

у якому  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$  – миттєве положення фази. Цей вираз допускає просту геометричну інтерпретацію. Сенс її полягає в тому, що кожному гармонічному коливанню з кутовою частотою  $\omega_0$  можна поставити у від-



**Рис. 7.14. Геометрична інтерпретація гармонічного коливання**  
 повідність вектор, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ , довжина (модуль) якого дорівнює амплітуді  $s_0$ , а його початкове положення для  $t = 0$  задається кутом  $\varphi_0$ , який співпадає з початковою фазою (рис. 7.14). Водночас вважається, що вектор обертається проти годинникової стрілки. Вертикальна проекція вектора  $s_0$  на вісь  $y$  змінюється з часом згідно із законом:

$$y(t) = s_0 \sin \varphi(t).$$

Миттєве положення вектора  $s_0$  визначається його фазою  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ . Коли кутова швидкість (кутова частота) дорівнює  $\omega_0$ , вектор виконує

$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  оборотів (циклів) в секунду, а тривалість одного обороту (період)

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu_0}$ . Горизонтальна складова вектора  $s_0$  на вісь  $x$  змінюється

згідно із законом:

$$x(t) = s_0 \cos \varphi(t).$$

Обидві проекції вектора  $s_0$  таким чином змінюються за гармонічним законом. Слід зауважити, що вектор  $s_0$  ніякій реальній фізичній системі не відповідає, а є тільки зручним геометричним образом, що дає можливість наочно представити гармонічні коливання. Таке зображення коливального

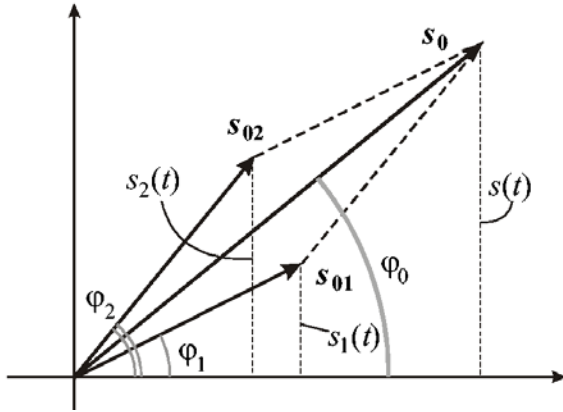


Рис. 7.15. Додавання двох коливань

руху називають векторною діаграмою.

За допомогою векторних діаграм можна виконувати додавання гармонічних коливань. Нехай ми маємо два коливання однакової частоти, але з різними початковими фазами і амплітудами:

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_{01});$$

$$s_2(t) = s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

Необхідно знайти коливання, які є сумою цих двох коливань:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t). \quad (7.51)$$

Для того, щоб виконати додавання цих двох коливань, представимо кожне з них у вигляді векторів  $s_1$  і  $s_2$  на векторній діаграмі. Там же зобразимо сумарний вектор  $s(t)$  з амплітудою  $s_0$  (рис. 7.15). Положення векторів  $s_1$  і  $s_2$  показані в момент часу  $t = 0$ . Амплітуду  $s_0$  і початкову фазу  $\varphi_0$  сумарного вектора, згідно показаної на рис. 7.15 діаграмі, можна знайти за формулами:

$$s_0 = \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2}; \quad (7.52)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}. \quad (7.53)$$

Це виходить з таких співвідношень:

$$s_{01x} = s_{01} \cos \varphi_1, \quad s_{01y} = s_{01} \sin \varphi_1;$$

$$s_{02x} = s_{02} \cos \varphi_2, \quad s_{02y} = s_{02} \sin \varphi_2;$$

$$s_{0x} = s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2 = s_0 \cos \varphi_0;$$

$$s_{0y} = s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2 = s_0 \sin \varphi_0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{s_{0y}}{s_{0x}},$$

які можуть бути отримані за графіком на рис. 7.15. Вертикальна проекція амплітуди  $s_0$  сумарного коливання змінюватиметься за гармонічним законом з частотою  $\omega_0$ , оскільки взаємне положення амплітуд векторів  $s_1$  і  $s_2$ ,  $s_{01}$  і  $s_{02}$ , не зміниться з часом. На рис. 7.15 також видно, що сумарне коливання  $s(t)$  випереджає по фазі коливання  $s_1(t)$  і відстає по фазі від  $s_2(t)$ . Повна фаза для кожного з трьох коливань відрізняється від їх початкових фаз на одну і ту ж величину  $\omega_0 t$ . Сума гармонічних коливань однакової частоти є гармонічним коливанням тієї ж частоти.

### 7.10 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо додавання коливань на прикладі системи, що складається з невеликого вантажу масою  $m$  і чотирьох сполучених з ним невагомих пружин, розташованих під прямим кутом одна відносно одної. Нехай цей вантаж рухається по гладкій горизонтальній поверхні (на рис. 7.16 показаний вигляд зверху). Положення вантажу у будь-який момент часу визначається двома координатами  $s_1(t)$  і  $s_2(t)$ . Ця система має два ступені свободи. Вважаємо, по-перше, що зміщення з положення рівноваги малі і виконується закон Гука. По-друге, в процесі зміщення уздовж напрямку  $s_1$  деформації пружин жорсткістю  $k_2$  не призводять до помітного

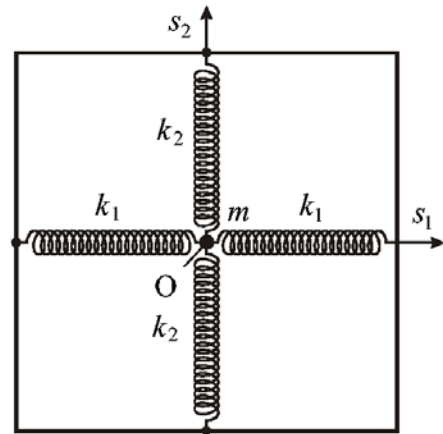


Рис. 7.16. Модель взаємно перпендикулярних коливань

вкладу в поворотну силу двох інших пружин з жорсткістю  $k_1$ , тобто:  $F_1 = -2k_1 s_1$ . Аналогічно вважаємо, в процесі зміщення уздовж  $s_2$  поворотна сила пов'язана з відхиленням від положення рівноваги тільки уздовж цього напрямку  $F_2 = -k_2 s_2$ . За таких умов коливання в двох взаємно перпендикулярних напрямках відбуваються незалежно одне від одного:

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega_{01} t + \varphi_1); \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega_{02} t + \varphi_2). \quad (7.54)$$

Тут власні частоти коливань визначаються за відомими співвідношеннями

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}; \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}.$$

В процесі збудження коливань в такій системі з довільним співвідношенням частот  $\omega_{01}$  і  $\omega_{02}$  траєкторія вантажу може бути достатньо складною. Її можна проаналізувати, вважаючи, що результуючий рух вантажу є суперпозицією двох взаємно перпендикулярних незалежних коливань [6].

З цією метою розглянемо спочатку рух вантажу у разі, коли  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ , тобто вважаємо, що  $k_1 = k_2$ . Для визначення траєкторії руху виключимо з (7.54) час. Для цього перепишемо його у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_{01}} &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_1; \\ \frac{s_2}{s_{02}} &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Помножимо перше рівняння (7.55) на  $\cos \varphi_2$ , а друге – на  $\cos \varphi_1$  і віднімемо від першого друге:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_{01}} \cos \varphi_2 &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_1 \cos \varphi_2; \\ \frac{s_2}{s_{02}} \cos \varphi_1 &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_2 \cos \varphi_1; \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_{01}} \cos \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cos \varphi_1 &= \cos \omega_0 t (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) = \\ &= \cos \omega_0 t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Тепер помножимо перше рівняння (7.55) на  $\sin \varphi_2$ , друге – на  $\sin \varphi_1$  і знову віднімемо друге рівняння від першого:

$$\frac{s_1}{s_{01}} \sin \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \sin \varphi_1 = \sin \omega_0 t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.58)$$

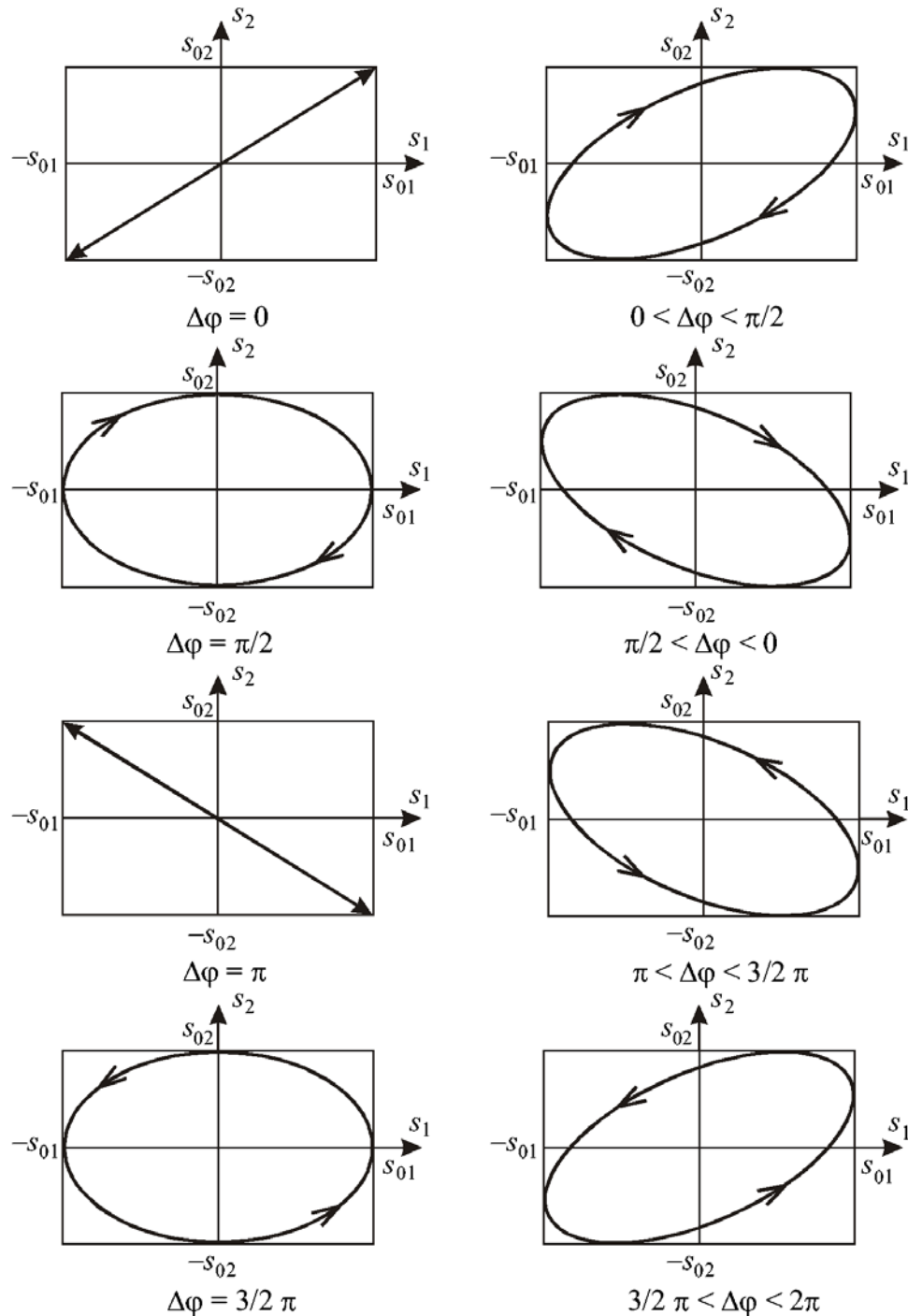
Нарешті піднесемо до квадрату (7.57) і (7.58) і складемо їх. В результаті час виключається, а траєкторією руху вантажу є еліпс:

$$\left( \frac{s_1}{s_{01}} \right)^2 + \left( \frac{s_2}{s_{02}} \right)^2 - 2 \frac{s_1}{s_{01}} \frac{s_2}{s_{02}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.59)$$

Отже, в загальному випадку вантаж здійснюватиме періодичні рухи по еліптичній траєкторії. Напрямок руху уздовж траєкторії і орієнтація осей еліпса відносно осей  $Os_1$  і  $Os_2$  залежить від різниці фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Усі можливі траєкторії знаходяться у прямокутнику із сторонами  $2s_{01}$ ,  $2s_{02}$ . На рис. 7.17 показані різні траєкторії руху вантажу. Для різниць фаз  $\Delta\varphi = 0$  і  $\Delta\varphi = \pi$  вантаж рухається по прямій лінії. Для різниць  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$  і  $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$  півосі еліпса співпадають з осями  $Os_1$  і  $Os_2$ . Якщо  $s_{01} = s_{02}$ , еліпс вироджується в коло. Коли різниця фаз  $0 < \Delta\varphi < \pi$ , вантаж рухається за годинниковою стрілкою, а якщо  $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$  – проти годинної.

Ми розглянули випадок однакових частот коливання  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ . Якщо частоти двох взаємно перпендикулярних коливань не співпадають, але є кратними, тобто  $m\omega_{02} = n\omega_{01}$ , де  $m, n$  – цілі числа, то траєкторії руху є замкнутими фігурами, що називаються фігурами Лісажу (рис. 7.18). Відношення частот коливань дорівнює відношенню кількості точок дотику фігури Лісажу сторін прямокутника, в який вона вписана. Якщо кратність

між частотами відсутня, траєкторія не є замкнутою і поступово заповнює увесь простір прямокутника  $Os_1$  і  $Os_2$ , як нитка в клубку [6, 14, 27].



**Рис. 7.17. Траєкторії руху вантажу з різними різницями фаз**

Про взаємно перпендикулярні коливання можна говорити і тоді, коли величиною, що коливається, є не скаляр, а вектор, наприклад, вектор напруженості електричного поля в певній точці простору або вектор



магнітного поля. Водночас в процесі таких коливань може змінюватися не лише модуль вектора, але і його напрям в просторі. Нехай ми маємо два вектори  $\mathbf{S}_1$  і  $\mathbf{S}_2$ , що коливаються з однаковою частотою виду:

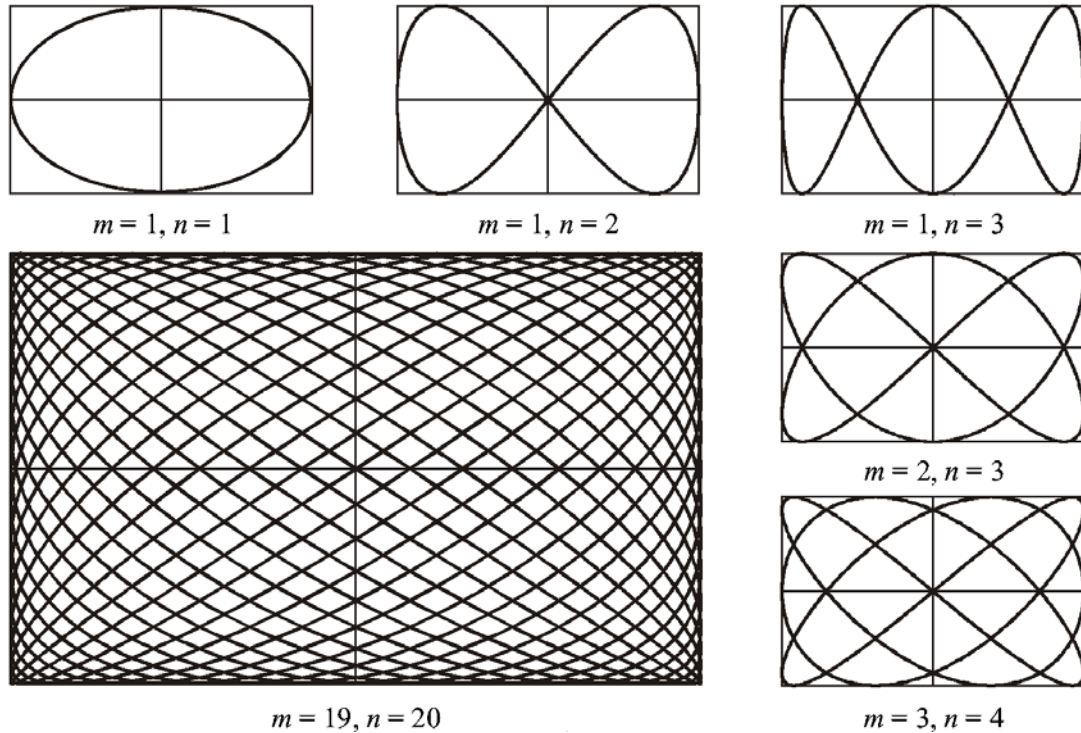


Рис. 7.18. Фігури Лісажу

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

де  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  – два взаємно перпендикулярні постійні вектори, з яких  $\mathbf{A}_1$  спрямований упродовж  $x$ ,  $\mathbf{A}_2$  – упродовж  $y$ . Тобто в процесі коливань вектор  $\mathbf{S}_1$  постійно спрямований паралельно осі  $x$ ,  $\mathbf{S}_2$  – паралельно осі  $y$ . Сумарний вектор  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  в загальному випадку змінює свій напрям в просторі. У будь-який момент часу проєкції сумарного вектора на осі  $x$  і  $y$  дорівнюють:

$$\begin{cases} S_x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \\ S_y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{cases} \quad (7.60)$$

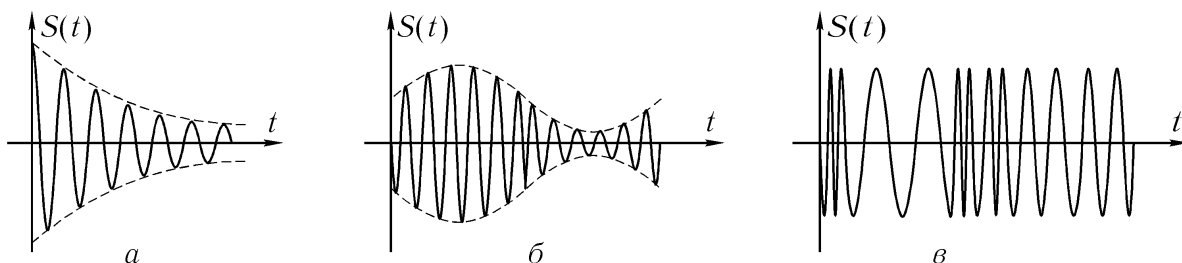
Змінюється і орієнтація сумарного вектора. Кінець вектора  $\mathbf{S}$  описує з часом деяку плоску траєкторію і (7.60) можна розглядати як рівняння цієї

траєкторії в параметричній формі. Це – рівняння еліпса в осях  $(2A_1, 2A_2)$ . Орієнтація головних півосей еліпса залежить від зсуву фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Коливання вектора в цьому випадку називають еліптично поляризованими.

Складнішою виявляється траєкторія руху кінця сумарного вектора, якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не співпадають. Замкнута траєкторія, яку описує кінець сумарного вектора – фігури Лісажу, розглянуті вище. Фігури Лісажу можна спостерігати на екрані осцилографа, якщо подати на його горизонтальний вхід (тобто на пластини конденсатора, що створює горизонтальне електричне поле) напругу згідно з законом  $x(t) = A_1 \cos(n\omega t + \varphi_1)$ , а на пластини, що створюють вертикальне – напругу  $y(t) = A_2 \cos(m\omega t + \varphi_2)$ . Електрони, що пролітають між обкладинками конденсатора уздовж прямої, перпендикулярної площині Оху, відхиляються сумарним електричним полем  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_1(t) + \mathbf{S}_2(t)$  і залишають на екрані слід у вигляді фігури Лісажу.

### 7.11 Модульовані коливання. Биття

1. Будь-який коливальний процес, відмінний від гармонічного, називають модульованим коливанням [14]. Приклади модульованих коливань показані нижче на рис. 7.19.



**Рис. 7.19. Приклади модульованих коливань**

Модульовані коливання в загальному випадку можна записати у вигляді:

$$S(t) = A(t)(\cos\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (7.61)$$

На відміну від гармонічних коливань, тут  $A(t)$  і  $\varphi(t)$  – величини, що змінюються за часом. Цікавим є випадок, коли  $A(t)$  і  $\varphi(t)$  – функції, що змінюються повільно. Визначимо поняття зміни повільно вказаних функцій. Нехай ми маємо гармонічні коливання виду:

$$S_0(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Тут  $\omega_0$  – частота гармонічного коливання, та ж сама, що входить в (7.61).

Розглянемо інтервал часу  $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$  і нехай на цьому інтервалі функції  $A(t)$  і

$\varphi(t)$  залишаються практично незмінними, причому  $A(t) \approx A_0$ ,  $\varphi(t) \approx \varphi_0$ . У більшості практично цікавих випадках достатньо вважати, що нерівність  $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$  виконується, якщо інтервал часу  $\tau$  на один-два порядку більше

періоду коливань  $\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$ . Таке модульоване коливання називають

квазігармонічним (мов би гармонічним, майже гармонічним). Величини  $A(t)$  і  $\varphi(t)$ , що повільно змінюються, називають амплітудою і початковою фазою відповідно модульованого коливання. Таким чином, квазігармонічне коливання характеризують двома параметрами: періодом коливань  $T_0$  і часом  $\tau \gg T_0$ , що характеризує швидкість зміни амплітуди  $A(t)$  і/або початкової фази  $\varphi(t)$ . Тому говорять, що функція  $A(t)$  описує закон амплітудної модуляції, а функція  $\varphi(t)$  – фазової модуляції.

Якщо  $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$ , а амплітуда  $A = A(t)$  є функцією часу, то таке коливання називають модульованим за амплітудою. Якщо  $A(t) = A_0 = \text{const}$ , а фаза  $\varphi = \varphi(t)$  є функцією часу, то таке коливання називають модульованим за фазою. У загальному випадку коливання

можуть бути модульованими як за амплітудою, так і за фазою, тобто мати вигляд (7.61). Коливання, що показані на рис. 7.19 (а, б) є прикладами амплітудно-модульованих коливань, на рис. 7.19 (в) – фазово-модульованими.

## 2. Модульоване коливання виду

$$S(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.62)$$

у якому закон модуляції має вигляд  $A(t) = A_0\cos(\Omega t + \varphi_0)$ , називають биттям [1-3]. Тут  $A(t)$  повільно змінюється в часі, тобто множник  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  безліч разів змінює свій знак (проходить багато періодів) перш, ніж значення  $A(t)$  помітно зміниться. Інакше, період зміни функції

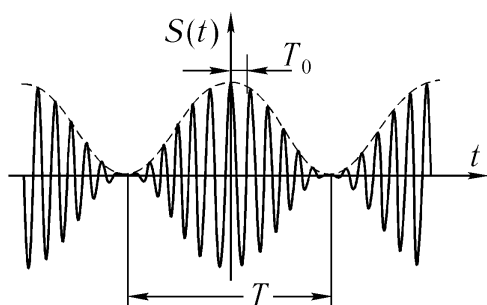


Рис. 7.20. Биття

$A(t)$ , рівний  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  набагато більший від періоду  $\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$ , тобто  $\omega_0 \gg \Omega$ .

Коливання (7.62) із законом модуляції  $A(t) = A_0\cos(\Omega t + \varphi_0)$  показано на рис.

7.20. Таке квазігармонічне коливання

називають гармонічним коливанням з амплітудою, що змінюється повільно.

Розглянемо випадки виникнення биття. Нехай ми маємо два вантажі, підвішені на пружинах або на жорстких нитках один над одним (рис. 7.21). Під час таких коливань зміщення (у першому випадку) або відхилення від положення рівноваги (у другому випадку) змінюватимуться взаємозалежно один від одного. Подібна коливальна система матиме два ступені свободи. Аналогічний випадок спостерігається тоді, коли розглядаємо рух

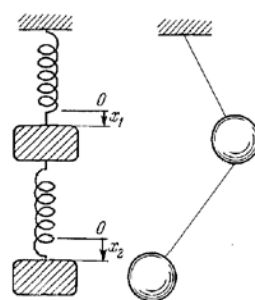
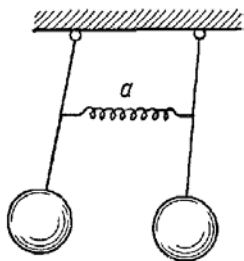


Рис. 7.21.  
Коливальні системи з двома ступенями свободи

двох маятників, зв'язаних пружиною. Коливання одного маятника закономірно пов'язані з коливаннями іншого маятника. Коливання трьох, чотирьох і так далі числа маятників – це системи з 3, 4, і так далі ступенями свободи [27].

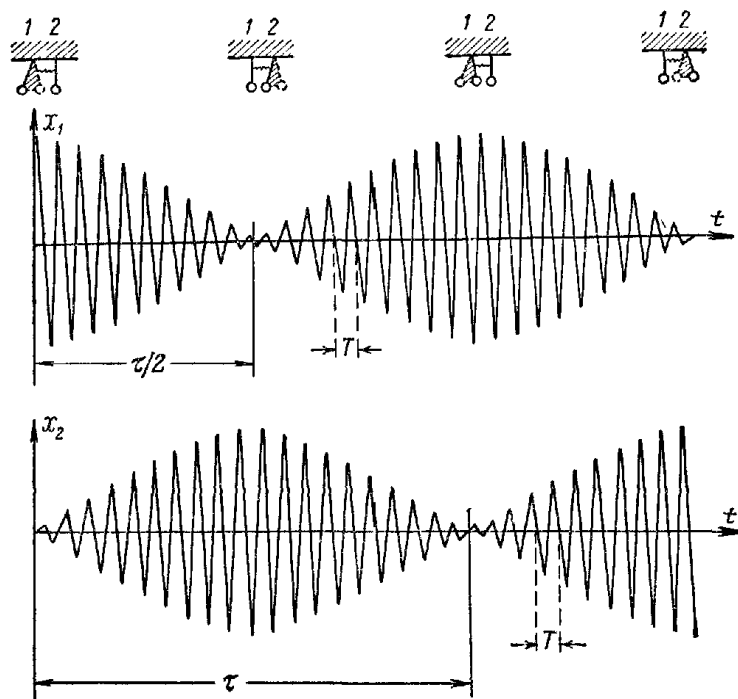


**Рис. 7.22.**  
Коливання  
зв'язаних  
маятників

Розглянемо детальніше коливання двох абсолютно однакових маятників, зв'язаних пружиною (рис. 7.22), що можуть коливатися у вертикальній площині, яка проходить через їх точки підвісу. Ця система також є системою з двома ступенями свободи. Відхилимо один з маятників від положення рівноваги, іншого затримаємо в положенні рівноваги, а потім обидва відпустимо

одночасно. Маятники

коливатимуться так, що амплітуда одного відхиленого маятника почне поступово спадати, тоді як іншого, залишеного в положенні рівноваги, почне збільшуватися впродовж певного часу  $\tau/2$ , до тих пір, доки перший не зупиниться, а інший не почне гойдатися з такою ж амплі-



**Рис. 7.23.** Картина биття

тудою, як і перший на початку. Далі маятники міняються ролями: другого розгойдує перший і процес повторюється, оскільки маятники абсолютно однакові. Таким чином, маятники здійснюватимуть то наростаючі, то

спадаючі коливання, і через час  $\tau$  обмінюватимуться енергією (рис. 7.23). Такі коливання і називають биттям, а час  $\tau$  – періодом биття.

Якщо маятники відхилити з положення рівноваги довільним чином, то характер коливань маятників залишиться тим самим: амплітуда обох маятників буде то спадати, то зростати, як і в першому випадку, але тепер амплітуда кожного з них не спадатиме до нуля, а змінюватиметься від деякого мінімуму до деякого максимуму (рис. 7.24).

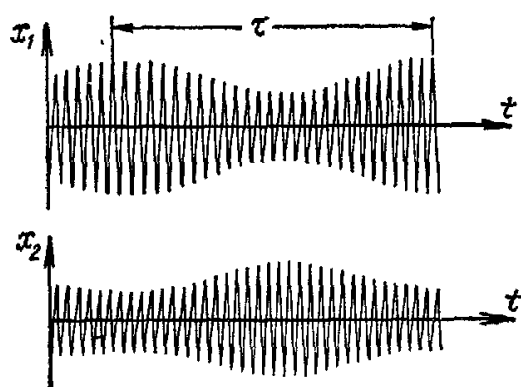


Рис. 7.24. Биття під час довільного відхилення від положення рівноваги

Коливання кожного з маятників не є гармонічними. Кожен з маятників здійснює нібито гармонічне коливання, але амплітуда його періодично змінюється з одним і тим же періодом биття  $\tau$ . Величина зміни амплітуди залежить від способу збудження коливань.

Щоб розібратися в картині биття, розглянемо питання про додавання двох гармонічних коливань різної частоти [3]. Водночас цьому відзначимо, що додавання двох гармонічних коливань однієї і тієї ж частоти завжди є гармонічне коливання тієї ж частоти, а додавання двох коливань різної частоти не дасть гармонічне коливання. Нехай точка здійснює коливання відносно якої-небудь системи відліку згідно із законом

$$S_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Сама система відліку здійснює коливання згідно із законом

$$S_2 = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Результуюче коливання:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + (B - A) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \end{aligned}$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) + (B - A) \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (7.63)$$

Перший доданок в правій частині результуючого виразу (7.63) не є гармонічним коливанням, оскільки це добуток двох гармонічних чинників з частотами  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$  і  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ . Якщо величини  $\omega_1$  і  $\omega_2$  мало відрізняються, то  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  буде величиною одного порядку з  $\omega_1$  або  $\omega_2$ , проте частота  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$  буде значно меншою порівняно з  $\omega_1$  або  $\omega_2$ . Тоді цей доданок можна представити як майже гармонічне з частотою  $\omega_1$  або  $\omega_2$ , у якого «амплітуда» дорівнює  $2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$  або «амплітуда» така, що поволі змінюється за часом. Це випадок «чистого биття», що відповідає верхньому маятнику на рис. 7.23. Період биття в цьому випадку  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ . Другий доданок в тому ж результуючому виразі – це гармонічні коливання з частотою  $\omega_2$ . Додавання биття з гармонічними коливаннями дають картину биття, коли «амплітуда» коливань змінюється з періодом биття, але не досягає нуля, що відповідає картині биття на рис. 7.24. Отже, якщо додавати коливання з рівними амплітудами  $A = B$ , биття будуть «чистими», у разі  $A \neq B$  – це звичайні биття з частотою

$$\nu_6 = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2, \quad (7.64)$$

де  $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ ;  $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$  – частоти гармонічних коливань, що дають додавання биття. Частота биття дорівнює різниці частот доданих коливань, і не

залежить від їх амплітуд і початкових фаз.

Час між двома послідовними проходженнями в один бік через нуль

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2},$$

на рис. 7.23 – малий період доданих коливань. Таким чином, для зв'язаних маятників для будь-якого способу збудження коливань власні коливання – це биття кожного з них, і дорівнюють сумі двох гармонічних коливань з частотами

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{\tau}; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{\tau}.$$

Це власні частоти системи, що залежать від фізичних параметрів.

Власні коливання двох маятників складаються з суми двох гармонічних коливань, причому різниця частот цих коливань дорівнює частоті биття.

### **Задачі для самостійного розв'язування**

7.1. Вивести вираз для частоти коливання фізичного маятника із закону збереження повної механічної енергії.

7.2. Знайти залежність періоду коливань частинки масою  $m$  від енергії  $E$ , якщо вона вільно рухається між двома паралельними стінками, відстань між якими  $L$ , перпендикулярно цим стінкам. Зіткнення частинки із стінкою розглядати як абсолютно пружне.

7.3. Знайти період коливань точки масою  $m$ , яка рухається в полі тяжіння в гладкій циклоїдній чаші  $x = R(\varphi + \sin\varphi)$ ,  $y = R(1 - \cos\varphi)$ .

7.4. Номерок з гардеробу є диском радіусу  $R$ , на краю якого є отвір радіусом  $r$ . Номерок висить на тонкому цвяху. Знайти частоту його малих коливань у своїй площині.

7.5. Симетричний хрест, що складається з двох взаємно-



перпендикулярних тонких однорідних стержнів довжиною  $L$ , може коливатися в полі тяжіння навколо горизонтальної осі, що проходить через один із стержнів і перпендикулярний йому. При якому видаленні  $X$  осі обертання від центру хреста період його малих коливань буде мінімальний? Знайдіть мінімальне значення періоду коливань хреста.

7.6. В суцільному однорідному циліндрі радіусу  $R$  зроблена циліндрична порожнина радіусом  $R/2$  з віссю, що проходить через середину радіусу циліндра. Визначити період малих коливань  $T$  циліндра на горизонтальній площині під час коливань без ковзання.

7.7. Визначити циклічну частоту  $\omega_0$  власних коливань системи: кульки масою  $m$ , закріпленої на кінці невагомго стержня довжини  $L$ , до якого прикріплені дві пружини жорсткістю  $k_1, k_2$ . Пружини невагомні. (Вказівка: знайти повну механічну енергію системи).

7.8. Бажаючи визначити розподіл потенціалу уздовж осі «чорного ящика», експериментатор пускає уздовж осі іони з різними швидкостями. Іони, випущені із швидкістю  $V$ , повертаються назад через час  $T = \alpha V^\beta$ . Відновити залежність потенціалу від координати.

$$\left( U(x) = Kx^{\frac{2}{\beta+1}}, K = \left( \frac{4}{\alpha} \right)^{\frac{2}{\beta+1}} \right).$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Матвєєв А.М. Механіка і теорія відносності / А.М. Матвєєв. – Київ, 2005. – 430 с.
2. Sivukhin A.D. General physics. V.1 Mechanics / A.D. Sivukhin. – Mir Publishers, 1985. – 450 p.
3. Strelkov S. P. Mechanics / S. P. Strelkov. – Mir Publishers, 1978.– 565 p.
4. Ugarov U.A. Special Theory of Relativity. / U.A Ugarov. – Mir Publisher, 1979. – 410 p.
5. Irodov I.E. Mechanics. Basic laws / I.E Irodov. – Revised edition, 1988. ISBN-10: 9785030008004, ISBN-13 : 978-5030008004. – 387 p.
6. Aleshkevch A.A. Mechanics / A.A. Aleshkevch, L.G. Dedenko, V.A. Karavaev. – ACADEMIA, 2004. – 470 p.
7. Philip Harris. Special Relativity / Harris Philip // University of Sussex. Режим доступу: <https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/srHarris.pdf>.
8. David G. Simpson. General Physics I: Classical Mechanics. / Simpson G. David // Dept. of Natural Sciences, Prince George's Community College, Largo, Maryland; Larry L. Simpson, Union Carbide Corporation (ret.), South Charleston, West Virginia. Last updated: 2020. – 360 p. Режим доступу: <http://www.pgccphy.net/1030/phy1030.pdf>.
- 9 Landau. L.D. Theoretical Physics. V. I Mechanics / L.D. Landau, E.M Leftists – London: Butterworth-Heinenann, 1987. – 250 p.
10. Feynman R. P. The Feynman Lectures on Physics/ V. I. Mainly Mechanics, Radiation, and Heat. / R. P. Feynman, B. Leighton Robert, Sands Matthew. – The New Millennium Edition: by Basic Books; 50th New Millennium ed., 2011. – 560 p.
11. Kittel C. Berkeley Physics Course. V1. Mechanics. / C. Kittel, W. Knight, A. Ruderman. Second Edition. – N-Y.: McGraw Book Company. 1973.– 451 p.

12. Olkhovsky I.I. Theoretical Mechanics Course for Physicists. / I.I.Olkhovsky. – Mir Publishers, 1985. – 365 p.
13. Lindner A. Complete Course on Theoretical Physics: From Classical Mechanics to Advanced Quantum Statistics: Undergraduate Lecture Notes in Physics / A. Lindner, D. A. Strauch – Springer, ISBN 978-3-030-04359-9, 2018. – 655 p.
14. Kingsep A.S. Fundamentals of Physics. General physics course: V.1 Mechanics, electricity and magnetism, vibrations / A.S. Kingsep, G.R. Lokshin, O.A. Olkhov – Mir Publishers: ISBN 5-9221-0164-1, 2001. – 560 p.
15. Паршин Д.А., Классическая механика. Лекции по общему курсу физики / Д.А. Паршин, Г.Г. Зегря – С-П: Научно-образовательный центр, Физико-технический Институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 2003. – 180 с.
16. Астахов А.В. Механика. Кинетическая теория / А.В. Астахов: ред. Ю. М. Широков. – Физматлит: 1977. – 321 с.
17. Медведев Б.В. Начала теоретической физики / Б.В. Медведев – Наука, 1977. – 496 с.
18. Taylor E. F. Spacetime Physics / E. F. Taylor, J. A. – Wheeler 2nd edition – W. H. Freeman, 1992. – 320 p.
19. Тельнов В.И. Механика и теория относительности: учебное пособие / В.И. Тельнов –НГУ, 2011 г. – 276 с.
20. Пеннер Д.И., Электродинамика и специальная теория относительности / Д.И. Пеннер, В.А. Угаров – Просвещение, 1980. – 272 с.
21. Баръяхтар В.Г., Довгий С.А. Механіка / В.Г. Баръяхтар, И.В. Баръяхтар, Л.П Гермаш – Київ: НАН України, 2004. – 385 с.
22. Казаков Р.Х. Ньютоновская механика / Р.Х. Казаков – Высшая школа, 2004. – 185 с.
23. Векуа Н.П. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике / Н.П. Векуа –Наука, 1991. – 256 с.

24. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Т.1. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик – К.: «Техніка», 1999. – 540 с.
25. Гірка В.О., Механіка. Навчальний посібник / В.О. Гірка, І.О. Гірка – Харків, ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2013 р. – 335 с.
26. Кириченко Н.А., Общая физика. Механика / Н.А. Кириченко, К.М. Крымский – МФТИ, 2013. – 292 с.